Examen (Algèbre 4)

u

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

A

LPEM

Questions de cours (3pts)

Rappeler :

1. La définition d'une forme linéaire,
2. La définition d'hyperplan d'un espace vectoriel,
3. La définition d'une matrice trigonalisable,
4. La définition du bloc de Jordan $J_{\lambda,n}$,
5. Le théorème de Cayley-Hamilton,
6. Le lemme des noyaux.

Exercice 1 (3pts)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - A$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Sans calculer χ_A déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 2 (4pts)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $\chi_A = -(X-1)^2(X+2)$. En déduire le spectre de A.
2. calculer $(A - I_3)(A + 2I_3)$, puis justifier que A est diagonalisable.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.
5. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

PROBLÈME (10pts)

Dans tout le problème E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. Le but du problème est de démontrer, pour un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé, le résultat suivant : *L'endomrphisme u^2 est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable et* $\ker u = \ker u^2$.

Première partie : Cas où u est diagonalisable

On suppose dans **cette partie** que u est **diagonalisable**.

1. Montrer que u^2 est diagonalisable.
2. Montrer que $\ker u \subseteq \ker u^2$.
3. Montrer que $\ker u^2$ est stable par u.
4. Soit $v = u|_{\ker u^2}$.
   - 4.1 Justifier que v est diagonalisable.
   - 4.2 Montrer que $v^2 = 0$, en déduire que $v = 0$.
5. En déduire que $\ker u = \ker u^2$.

Deuxième partie : Cas où u^2 est diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé,

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

6. Justifier, pour tout $1 \leq k \leq r$, que λ_k^2 est une valeur propre de u^2.
7. Vérifier que $\chi_u(X)\chi_u(-X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X^2 - \lambda_k^2)^{m_k}$.
8. Montrer que $\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k^2)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de u^2.
9. En déduire que $\mathrm{Sp}(u^2) = \{\lambda_k^2 \ / \ 1 \leq k \leq r\}$.
10. Soit v un endomorphisme de E. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ où pour chaque $1 \leq i \leq m$, F_i est un sous espace stable par v. Montrer que v est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq m$, $v|_{F_i}$ est diagonalisable.
    On suppose dans la suite de **cette partie que** u^2 **est diagonalisable et que** $\ker u^2 = \ker u$.
11. Que peut-on dire de $\bigoplus_{\beta \in \mathrm{Sp}(u^2)} \ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E)$?
12. Soit $\beta \in \mathrm{Sp}(u^2)$.
    - 12.1 Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$ tel que $\beta = \alpha^2$.
    - 12.2 On pose $w = u|_{\ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E)}$. Justifier que $X^2 - \beta$ est un polynôme annulateur de w.
    - 12.3 Montrer que w est diagonalisable.
      Indication : on pourra distinguer les deux cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.
13. En déduire que u est diagonalisable.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END