Corrigé

Examen (Algèbre 4)

u

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

A

LPEM

Questions de cours (3pts)

Cours

Exercice 1 (3pts)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

1. Par un calcul simple $A^2 - A = 2I_3$.
2. $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de u qui est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
3. Notons que χ_u est un polynôme de degré 3 (impair) et à coefficients dans $\mathbb{R}$ donc admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$, et donc $\mathrm{Sp}(A)$ est non vide.
   Comme $(X+1)(X-2)$ est annulateur de A, on donc $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{-1, 2\}$, ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$, ou $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$ ou $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$, et on va montrer que les deux premiers cas sont impossibles.
   Si $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$, dans ce cas A est semblable à la matrice $-I_3$ (car A diagonalisable), par suite $A = -I_3$ ce qui n'est pas le cas.
   Si $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$, dans ce cas A est semblable à la matrice $2I_3$ (car A diagonalisable), par suite $A = 2I_3$ ce qui n'est pas le cas.
   Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Exercice 2 (4pts)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1-X & -X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)((1+X)X-2) \\ &= (1-X)(X-1)(X+2) = -(X-1)^2(X+2) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A)=\{-2,1\}$.

2. χ_A est scindé à racines simples, donc A diagonalisable.

3. Les sous espaces propres de A :

$E_{-2}(A)=\ker(A+2I_3)$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(A)$ si, et seulement si, $x=z$ et $y=-z$, donc

$$E_{-2}(A)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$E_1(A)=\ker(A-I_3)$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1(A)$ si, et seulement si, $x=y-z$, donc

$$E_1(A)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

4. On pose $D=\mathrm{diag}(-2,1,1)$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base on a $A=PDP^{-1}$.

5. Soit D' la matrice diagonale, $D'=\mathrm{diag}(-\sqrt[3]{2},1,1)$. Clairement $D'^3=D$. Maintenant, on considère la matrice $B=PD'P^{-1}$. Il vient alors que $B^3=(PD'P^{-1})^3=PD'^3P^{-1}=PDP^{-1}=A$.

PROBLÈME (10pts)

Dans tout le problème E est un espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et u un endomorphisme de E. Le but du problème est de démontrer, pour un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé, le résultat suivant : *L'endomrphisme u^2 est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable et* $\ker u=\ker u^2$.

Première partie : Cas où u est diagonalisable

On suppose dans cette partie que u est diagonalisable.

1. u étant diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale (i.e $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)=D$ est diagonale) . Puisque $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^2)=D^2$ est diagonale, l'endomorphisme u^2 est diagonalisable.

2. Soit $x\in\ker u$ c'est-à-dire $u(x)=0$, donc $u^2(x)=u(u(x))=u(0)=0$, d'où $x\in\ker u^2$.

3. Les deux endomorphismes u et u^2 commutent, donc $\ker u^2$ est stable par u.
Méthode directe : Si $x\in\ker u^2$, alors $u^2(u(x))=u(u^2(x))=u(0)=0$, donc $u(x)\in\ker u^2$. Ainsi $\ker u^2$ est stable par u.

4. Soit $v=u|_{\ker u^2}$.

4.1 Puisque u est diagonalisable, l'endomorphisme induit par u sur tout sous espace stable lui aussi diagonalisable.

$\boxed{4.2}$ Notons d'abord que v est un endomorphisme de $\ker u^2$. Soit $x \in \ker u^2$ on a donc $u^2(x) = 0$, d'où $v^2(x) = u^2(x) = 0$. Par suite $v^2 = 0$.
v est un endomorphisme nilpotent ($v^2 = 0$), donc 0 est la seule valeur propre de v. Comme v est diagonalisable, il existe une base de $\ker u^2$ dans laquelle la matrice de v est diagonale et dont les éléments de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire la matrice nulle, par suite $v = 0$.

$\boxed{5.}$ D'après le résultat de la question 2, il suffit de montrer que $\ker u^2 \subseteq \ker u$. Soit $x \in \ker u^2$, on a $u(x) = v(x) = 0$, donc $x \in \ker u$. D'où le résultat.

Deuxième partie :
Cas où u^2 est diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé,

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

$\boxed{6.}$ Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_k, donc $x \neq 0$ et $u^2(x) = u(u(x)) = \lambda_k u(x) = \lambda_k^2 x$, ainsi λ_k^2 est une valeur propre de u^2.

$\boxed{7.}$ Notons d'abord que $m_1 + \ldots + m_r = n$.

$$\begin{aligned}
\chi_u(X)\chi_u(-X) &= \left((-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}\right)\left((-1)^n \prod_{k=1}^{r} (-X - \lambda_k)^{m_k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{r} \left((X - \lambda_k)^{m_k}(-X - \lambda_k)^{m_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda_k^2 - X^2)^{m_k} \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X^2 - \lambda_k^2)^{m_k}
\end{aligned}$$

$\boxed{8.}$ D'après le résultat de la question précédente on a $(-1)^n \prod_{k=1}^{r} (u^2 - \lambda_k^2)^{m_k} = \chi_u(u)\chi_u(-u)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, il vient que $(-1)^n \prod_{k=1}^{n} (u^2 - \lambda_k^2)^{m_k} = 0$, par suite $\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k^2)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de u^2.

$\boxed{9.}$ D'après le résultat de la question précédente, toutes le valeurs propres de u^2 sont des racines du polynôme $\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k^2)^{m_k}$, c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u^2) \subseteq \{\lambda_k^2 \ / \ 1 \leq k \leq r\}$. En combinant ceci avec le résultat de la question 6, on obtient le résultat i.e $\mathrm{Sp}(u^2) = \{\lambda_k^2 \ / \ 1 \leq k \leq r\}$.

$\boxed{10.}$ Soit v un endomorphisme de E. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ où pour chaque $1 \leq i \leq m$, F_i est un sous espace stable par v. Montrer que v est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq m$, $v|_{F_i}$ est diagonalisable.
Si v est diagonalasible alors $v|_{F_i}$ est diagonalisable.
Réciproquement, on suppose que les endomorphismes $v|_{F_i}$ sont diagonalisable. Pour $1 \leq i \leq m$, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i formée de vecteurs propres de $v|_{F_i}$ donc de vecteurs propres de v, et on considère $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_m$. Alors $\mathscr{B}$ est une base de E formée de vecteurs propres de v. Par suite v est diagonalisable.
On suppose dans la suite de cette partie que u^2 est diagonalisable et que $\ker u^2 = \ker u$.

$\boxed{11.}$ Puisque u^2 est diagonalisable, les sous espaces propres de u^2 sont supplémentaires dans E c'est-à-dire $\bigoplus_{\beta \in \mathrm{Sp}(u^2)} \ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E) = E$.

12. Soit $\beta \in \mathrm{Sp}(u^2)$.

12.1 D'après le résultat de la question 9 les valeurs propres de u^2 sont les carrées des valeurs propres de u, donc il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$ tel que $\beta = \alpha^2$.

12.2 On pose $w = u|_{\ker(u^2-\beta \mathrm{Id}_E)}$.Notons d'abord que w est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E)$. Soit $x \in \ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E R)$, alors $u^2(x) - \beta x = 0$, par suite $w^2(x) - \beta x = 0$, en d'autres termes $w^2 - \mathrm{Id}_{\ker(u^2-\beta \mathrm{Id}_E)} = 0$, donc $X^2 - \beta$ est un polynôme annulateur de w.

12.3 Premier cas : Si $\beta \neq 0$. Dans ce cas $\beta = \alpha^2$ et $\alpha \neq -\alpha$. Le polynôme $X^2 - \beta = (X - \alpha)(X + \alpha)$ est annulateur de w scindé a racines simples, donc w est diagonalisable.
Deuxième cas : $\beta = 0$. Soit $x \in \ker u^2$, puisque $\ker u^2 = \ker u$, on obtient $x \in \ker u$, par suite $u(x) = 0$. Donc $w(x) = u(x) = 0$. D'où $w = 0$ et en particulier diagonalisable.

13. On a $E = \bigoplus_{\beta \in \mathrm{Sp}(u^2)} \ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E)$, les sous espaces vectoriels $\ker(u^2 - \beta \mathrm{Id}_E)$ sont stable par u et $u|_{\ker(u^2-\beta \mathrm{Id}_E)}$ est diagonalisable (d'après le résultat précédent). D'après le résultat de la question 10 l'endomorphisme u est diagonalisable.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END