Examen (rattrapage) (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Questions de cours (3pts)

Rappeler :

1. La définition de sous espace caractéristique,
2. La définition du bloc de Jordan $J_{\lambda,m}$,
3. La définition de la base duale $\mathscr{B}^*$ d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
4. La définition d'une forme linéaire,
5. Le théorème de décomposition de Dunford,
6. Le lemme des noyaux.

Exercice 1 (5pts)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (2pts)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $u : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'application définie par :

$$u(M) = AM$$

.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   On suppose, pour la suite de cet exercice , que $A^2 = I_n$
2. Vérifier que A est diagonalisable .
3. Calculer u^2 , en déduire que u est diagonalisable.

PROBLÈME (10pts)

Autour des endomorphismes de rang 1

Dans tout le problème E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Première partie :
Endomorphisme associé à une forme linéaire

Dans cette partie, $\varphi : E \to \mathbb{K}$ désigne une forme linéaire **non nulle**.

1. Quel est le rang de φ et $\dim \ker \varphi$.
   Soit $e \in E$ tel que $\varphi(e) \neq 0$. Soit $u : E \to E$ l'application définie par $u(x) = \varphi(x)e$.
2. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
3. Montrer que $\ker u = \ker \varphi$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e)$.
4. Montrer que pour tout $x \in E$, $u^2(x) = \varphi(e)u(x)$.
5. Montrer que $X^2 - \varphi(e)X$ est un polynôme annulateur de u.
6. En déduire que u est diagonalisable.

Deuxième partie :
Endomorphisme de rang 1

Dans cette partie, v désigne un endomorphisme de E de rang 1 (i.e $\operatorname{rg}(v) = 1$).

7. Quel est la dimension de $\ker v$?
8. Justifier qu'il existe un vecteur non nul e' de E tel que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}(e')$.
9. Montrer que e' est un vecteur propre de v.(Indication : remarquer que $v(e') \in \operatorname{Im} v$).
   On note, pour la suite de cette partie, λ la valeur propre de v associé au vecteur propre e' (i.e $v(e') = \lambda e'$).
10. Montrer que $\operatorname{Im} v \subseteq E_\lambda(v)$
11. Soit $x \in E$. Vérifier que $v(x) \in E_\lambda(v)$, en déduire que $v^2(x) = \lambda v(x)$.
12. En déduire que $X^2 - \lambda X$ est un polynôme annulateur de v.
13. La trace de v :
    - 13.1 Justifier qu'il existe $e_1 \in E$ tel que $v(e_1) = e'$.
    - 13.2 Montrer que $E = \ker v \oplus \operatorname{Vect}(e_1)$.
    - 13.3 En déduire que $\lambda = \operatorname{tr}(v)$. (Indication : considérer une base adaptée à la somme $\ker v \oplus \operatorname{Vect}(e_1)$).
14. Montrer que si $\operatorname{tr}(v) \neq 0$, alors v est diagonalisable.
15. Montrer que si $\operatorname{tr}(v) = 0$, alors v n'est pas diagonalisable.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END