Corrigé

# Examen (rattrapage) (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

## Questions de cours (3pts)

Cours | Cours

**Exercice 1 (5pts)**

Soit $A$ la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$ :

$$\chi_A = \begin{vmatrix}1-X & -1 & 0\\ -1 & 1-X & 1\\ 0 & 0 & 3-X\end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix}1-X & -1\\ -1 & 1-X\end{vmatrix} = (3-X)((1-X)^2-1) = -X(3-X)(2-X).$$

Le polynôme caractéristique de $A$ est scindé a racines simples donc $A$ est diagonalisable.

2. On a $\mathrm{Sp}(A)=\{0,2,3\}$.
Les sous espaces propres :

Le sous espace propre $E_0(A)=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})\ /\ AX=0\}$ : $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_0(A)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y & = 0\\ -x+y+z & = 0\\ 3z & = 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$x=y$ et $z=0$. D'où

$$\boxed{E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)}$$

Le sous espace propre $E_2(A)=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})\ /\ AX=2X\}$ : $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_2(A)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y & = 2x\\ -x+y+z & = 2y\\ 3z & = 2z\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-y$ et $z=0$. D'où

$$\boxed{E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)}$$

Le sous espace propre $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 3X\}$ : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & = & 3x \\ -x + y + z & = & 3y \\ 3z & = & 3z \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow$ $y = -2x$ et $z = x + 2y = -3x$. D'où

$$\boxed{E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)}$$

$\boxed{3.}$ On pose $D = \text{diag}(0,2,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, par la formule de changement de bases on a $A = PDP^{-1}$.

$\boxed{4.}$ $D$ est une matrice diagonale, donc $D^n = \text{diag}(0, 2^n, 3^n)$ pour $n \geq 1$ et $D^0 = I_3$.

$\boxed{5.}$ D'abord $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Par l'une des méthode de calcul d'inverse d'une matrice on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} A^n = PDP^{-1} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2^n & 3^n \\ 0 & 2^n & -2.3^n \\ 0 & 0 & -3.3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3.2^n & -3.2^n & 3.2^n - 2.3^n \\ -3.2^n & 3.2^n & -3.2^n + 4.3^n \\ 0 & 0 & 6.3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exercice 2 (2pts)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $u : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'application définie par :

$$u(M) = AM$$

.

$\boxed{1.}$ Soit $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $u(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = u(M) + \lambda u(N)$, donc $u$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose, pour la suite de cet exercice , que $A^2 = I_n$

$\boxed{2.}$ Comme $A^2 = I_2$, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de $A$ qui est scindé a racines simples, donc $A$ est diagonalisable .

$\boxed{3.}$ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $u^2(M) = u(AM) = A^2M = M$, donc $u^2 = \text{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. On en déduit alors que $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $u$ qui est scindé a racines simples donc $u$ est diagonalisable.

# PROBLÈME (10pts)

Autour des endomorphismes de rang 1

Dans tout le problème $E$ est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

## Première partie :
## Endomorphisme associé à une forme linéaire

Dans cette partie, $\varphi : E \to \mathbb{K}$ désigne une forme linéaire **non nulle**.

1. $\varphi$ est une forme linéaire non nulle, donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ et $\dim \ker \varphi = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi) = n - 1$.
   Soit $e \in E$ tel que $\varphi(e) \neq 0$. Soit $u : E \to E$ l'application définie par $u(x) = \varphi(x)e$.

2. Soient $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ . On a $u(x + \alpha y) = \varphi(x + \alpha y)e = (\varphi(x) + \alpha\varphi(y))e = \varphi(x)e + \alpha\varphi(y)e = u(x) + \alpha u(y)$, donc $u$ est un endomorphisme de $E$.

3. $x \in \ker u$ si, et seulement si, $\varphi(x)e = 0$ si, et seulement si, $\varphi(x) = 0$ (car $e \neq 0$) si, et seulement si, $x \in \ker \varphi$. D'où $\ker u = \ker \varphi$.
   On a $u(e) = \varphi(e)e$, donc $e = u(\frac{1}{\varphi(e)}e) \in \mathrm{Im}\, u$, par suite $\mathrm{Vect}(e) \subseteq \mathrm{Im}\, u$. D'autre part si $x \in E$, alors $u(x) = \varphi(x)e \in \mathrm{Vect}(e)$. D'où $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(e)$.

4. Soit $x \in E$, alors $u^2(x) = u(\varphi(x)e) = \varphi(x)u(e) = \varphi(x)\varphi(e)e = \varphi(e)(\varphi(x)e) = \varphi(e)u(x)$.

5. D'après le résulta de la question précédente, on a $u^2 = \varphi(e)e$, ou encore $u^2 - \varphi(e)u = 0$, donc $X^2 - \varphi(e)X$ est un polynôme annulateur de $u$.

6. On a $X^2 - \varphi(e)X = X(X - \varphi)$ est annulateur de $u$ qui est scindé a racines simples $(\varphi(e) \neq 0)$, donc $u$ est diagonalisable.

## Deuxième partie :
## Endomorphisme de rang 1

Dans cette partie, $v$ désigne un endomorphisme de $E$ de rang 1 (i.e $\mathrm{rg}(v) = 1$).

7. D'après la formule du rang, on a $\dim \ker v = \dim E - \mathrm{rg}(v) = n - 1$.

8. Le sous espace vectoriel $\mathrm{Im}\, v$ est de dimension 1 (droite vectorielle), il existe alors un vecteur non nul $e'$ de $E$ tel que $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Vect}(e')$.

9. On a $v(e') \in \mathrm{Im}\, v$, donc $v(e') \in \mathrm{Vect}(e')$, par suite il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v(e') = \alpha e'$, et ona de plus $e' \neq 0$, il vient alors que $e'$ est un vecteur propre de $v$.
   On note, pour la suite de cette partie, $\lambda$ la valeur propre de $v$ associé au vecteur propre $e'$ (i.e $v(e') = \lambda e'$).

10. On a $e' \in E_\lambda(v)$, donc $\mathrm{Vect}(e') \subseteq E_\lambda(v)$, par suite $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Vect}(e') \subseteq E_\lambda(v)$.

11. Soit $x \in E$. On a $v(x) \in \mathrm{Im}\, v \subseteq E_\lambda(v)$, donc $v(x) \in E_\lambda(v)$.
    Comme $v(x) \in E_\lambda(v)$, on a donc $v^2(x) = v(v(x)) = \lambda v(x)$.

12. D'après la question précédente, $v^2 = \lambda v$, c'est-à-dire $v^2 - \lambda v = 0$, donc $X^2 - \lambda X$ est un polynôme annulateur de $v$.

13. La trace de $v$ :
    - 13.1 Comme $e' \in \mathrm{Im}\, v$, il existe alors $e_1 \in E$ tel que $v(e_1) = e'$.
    - 13.2 On a $\dim \ker v + \dim \mathrm{Vect}(e_1) = n - 1 + 1 = n = \dim E$.
      Soit $x \in \ker v \cap \mathrm{Vect}(e_1)$, il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que $x = te_1$, de plus $te' = tv(e_1) = v(te_1) = v(x) = 0$, donc $t = 0$, par suite $x = 0$. On en déduit alors que $E = \ker v \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$.
    - 13.3 Soit $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ une base de $\ker v$, alors $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, e_1)$ est une base de $E$ adaptée à la somme $E = \ker v \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$. Comme $\varepsilon_i \in \ker v$ pour $1 \leq i \leq n-1$, on a donc $v(\varepsilon_i) = 0$.

D'autre part, il existe $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ tel que $e' = v(e_1) = t_1\varepsilon_1 + \dots + t_{n-1}\varepsilon_{n-1} + t_n e_1$. La matrice de $v$ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & t_1 \\ 0 & 0 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

En particulier, $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)) = t_n$. Mais $\lambda e' = v(e') = v(t_1\varepsilon_1 + \dots + t_{n-1}\varepsilon_{n-1} + t_n e_1) = t_n v(e_1) = t_n e'$, ce qui implique $t_n = \lambda$. D'où $\lambda = t_n = \mathrm{tr}(v)$.

$\boxed{14.}$ On suppose que $\mathrm{tr}(v) \neq 0$, dans ce cas $X^2 - \lambda X = X^2 - \mathrm{tr}(v)X = X(X - \mathrm{tr}(v))$ est un polynôme annulateur de $v$ qui est scindé a racines simples ($\mathrm{tr}(v) \neq 0$), donc $v$ est diagonalisable.

$\boxed{15.}$ On suppose que $\mathrm{tr}(v) = 0$, dans ce cas $X^2 - \mathrm{tr}(v)X = X^2$ est un polynôme annulateur de $v$, par suite $v$ est nilpoent, et puisque $v \neq 0$ (de rang 1), $v$ est alors non pas diagonalisable. (Un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement s'il est nul).

حظ سعيد للجميع

**Bonne chance**

**END**