Formes quadratiques

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P,Q) = P(0)Q(2) + P(1)Q(1) + P(2)Q(0)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Déterminer la forme quadratique associée à φ.
3. φ est-elle positive?

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : E \times E$ l'application définie par $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. φ est-elle positive.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $q : M \mapsto q(M) = (\mathrm{tr}(M))^2$ est une forme quadratique positive sur E. Expliciter la forme bilinéaire symétrique associée.
2. Montrer que $q : M \mapsto q(M) = \mathrm{tr}(M^2)$ est une forme quadratique positive sur E. Expliciter la forme bilinéaire symétrique associée.

Exercice 4

Soit E une $\mathbb{R}$ espace vectoriel et φ, ψ deux formes linéaires sur E. Montrer que

$$x \mapsto \varphi(x)\psi(x)$$

est une forme quadratique sur E.

Exercice 5

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)\mathbb{R}^3$ par;

$$q(x) = x_1^2 - x_2 + x_3$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
2. q est-elle une forme quadratique?

Exercice 6

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et $q : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(M) = \det(M)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
2. Écrire la matrice de q dans la base canonique de E.
3. Déterminer le noyau, le rang et la signature de q.
4. Soit T l'ensemble des matrices (éléments de E) de trace nulle. Montrer que $T^\perp = \mathrm{Vect}(I_2)$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $q : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)\,dt$.

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer la forme bilinéaire associée à q.
3. Dans cette question $n = 2$. Déterminer la signature de q ainsi une base orthogonale pour q.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie ≥ 2. Soit $q : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(f) = \operatorname{tr}(f^2)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que q est non dégénérée.

Exercice 9

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit φ la forme bilinéaire symétrique dont la matrie dans la base canonique de E est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter φ ainsi que la forme quadratique q associée.
2. Déterminer son rang et son noyau. Est-ce une forme non dégénérée?
3. Déterminer l'orthogonale de $H = \operatorname{Vect}((1,0,0),(1,0,1))$. A-t-on $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E$?

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme quadratique q de noyau K. Soit F un sous espace vectoriel de E et $G = F + N$.

1. Montrer que $N \subseteq N^{\perp}$.
2. Montrer que $(G/N)^{\perp} = F^{\perp}/N$.
3. En déduire que $F^{\perp\perp} = G$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, pour tous $P, Q \in E$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 tP(t)Q'(t)dt$ et $q(P) = \varphi(P,P)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique?
2. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie?
3. Calculer la matrice de q dans la base canonique de E.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q.
5. Pour $n = 2$, déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Exercice 12

Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau , le rang et la signature des formes quadratiques suivantes:

1. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = x^2 - yz$.
2. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = xy + yz + xz$.
3. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2zy$.
4. $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z,t) = x^2 - yz - 2zt + t^2$.
5. $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z,t) = 2xy + 2zt - 2yz - 2xt$.

Exercice 13

On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$.

1. Montrer que q est définie positive.
2. Déterminer une base orthonormale pour q.

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 2 et q une forme quadratique sur E.

1. Montrer que si q est positive (ou négative) alors $\ker q = \mathscr{C}(q)$.

2. On suppose dans cette question que $\ker q = \mathscr{C}(q)$. Soit F un supplémentaire de $\ker q$ dans E. On suppose qu'ils existent deux vecteurs $u, v \in E$ tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$.

   2.1 Montrer qu'ils existent deux vecteurs $u', v' \in F$ tels que $q(u') < 0$ et $q(v') > 0$.

   2.2 Montrer que la famille (u', v') est libre.
   On considère l'application $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = q(tu' + (1-t)v')$.

   2.3 Vérifier que h est continue sur $[0,1]$.

   2.4 En déduire qu'il existe un vecteur non nul $w \in F$ tels que $q(w) = 0$. Trouver une contradiction.

   2.5 Conclusion.

Exercice 15

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique, et déterminer la forme polaire, que l'on notera φ, associée à q.

2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Décomposer q en combinaison linéaire de carrées de formes linéaires linéairement indépendantes.

4. En déduire le rang et la signature de q.

5. Déterminer une base q-orthogonale $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 16

Soient $f_1, \dots, f_n$, n fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_{ij} = \int_0^1 f_i(t) f_j(t)\,dt$, puis pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j$.

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Montrer que q est positive.

3. Montrer que si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre alors q est définie positive.

4. Montrer que si q est positive alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

5. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier $f_i(t) = t^{i-1}$.

Exercice 17 (Espace hyperbolique)

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, q désigne une forme quadratique non dégénérée sur E de signature $(-1,1)$ et on note φ sa forme polaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E telle que $q(e_1) = 1$, $q(e_2) = -1$ et $\varphi(e_1, e_2) = 0$. On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$.

1. Calculer $q(\varepsilon_1)$.

2. Montrer qu'il existe un vecteur $\varepsilon_2 \in E$ tel que $q(\varepsilon_2) = -1$ et $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 0$.

3. Montrer que $\mathscr{B}' := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E.

4. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et q une forme quadratique sur E non dégénérée, et note φ sa forme polaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que les deux propriété suivantes sont équivalents:

   1.1 $\forall x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$,

$\boxed{1.2}$ $\forall x, y \in E, \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.

On note $\mathcal{O}(q)$ l'ensemble des endomorphisme de E vérifiant l'une des propriétés précédente.

2. Montrer que si $u \in \mathcal{O}(q)$ alors u est un isomorphisme.

3. Montrer que $\mathcal{O}(q)$ est un groupe.

4. Montrer que si $q \in \mathcal{O}(q)$ alors u transforme toute base q-orthogonale de E en une base q-orthogonale de E.