Examen blanc

φ Formes quadratiques et endomorphismes antisymétriques q

LPEM

Définition

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme antisymétrique si :

$$u = -u^*$$

Exercice 1 Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la signature et le rang de q.

Exercice 2 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit φ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter φ ainsi que la forme quadratique q associée .
2. Déterminer la signature et le rang de q.
3. Déterminer $(\text{vect}(1, -1, 1))^\perp$.

Exercice 3 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, F désigne le sous espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   - 2.1 Calculer la projection orthogonale de w sur $F^\perp$.
   - 2.2 En déduire $d(w, F)$.

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Première partie :
Une caractérisation des endomorphismes antisymétriques

1. Soit u un endomorphisme antisymétrique. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est antisymétrique si, et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
3. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans cette base. Montrer que u est antisymétrique si, et seulement si, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = -A$.

Deuxième partie :
Valeurs propres

Dans cette partie, u est un endomorphisme antisymétrique de E.

4. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{0\}$.
5. Montrer que u^2 est diagonalisable.
6. Montrer que $\mathrm{Sp}(u^2) \subseteq \mathbb{R}_-$.

Troisième partie :
Antisymétrique et nilpotent

Soit u un endomorphisme antisymétrique de E. On suppose dans cette partie que u est nilpotent.

7. Montrer que u^2 est nilpotent.
8. En déduire que $u^2 = 0$.
   Ind : on pourra appliquer le théorème spectral.
9. Pour $x \in E$, montrer que $\|u(x)\|^2 = 0$.
10. En déduire que $u = 0$