Corrigé

Examen blanc

φ

Formes quadratiques et endomorphismes antisymétriques

q

LPEM

Définition

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme antisymétrique si :

$$u = -u^*$$

Exercice 1 Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$$

1. Immédiate.

2. On a $q(x, y, z, t) = (x+z)(y+t) = \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2$. Considérons les deux formes linéaires $\varphi_1(x, y, z, t) = x + y + z + t$ et $\varphi_2(x, y, z, t) = x - y + z - t$. On complète cette famille en une base de $E^* = (\mathbb{R}^4)^*$ (de dimension 4). Matriciellement, dans la matrice suivante, il suffit de choisir les deux dernières colonnes de sort qu'elle soit inversible (de rang 4) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * \\ 1 & -1 & * & * \\ 1 & 1 & * & * \\ 1 & -1 & * & * \end{pmatrix}$$

Remarquons (par example) que le choix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Revenant à notre histoire (la forme quadratique) : La forme quadratique q s'écrit alors

$$q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\varphi_1(x, y, z, t)^2 - \frac{1}{4}\varphi_2(x, y, z, t)^2 + 0.\varphi_3(x, y, z, t)^2 + 0.\varphi_4(x, y, z, t)^2$$

Où $\varphi_3(x, y, z, t) = x$ et $\varphi_4(x, y, z, t) = y$ (les dernières colonnes de la matrice précédente). Maintenant on s'intéresse à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} x' &= \varphi_1(x, y, z, t) = x + y + z + t \\ y' &= \varphi_2(x, y, z, t) = x - y + z - t \\ z' &= \varphi_3(x, y, z, t) = x \\ t' &= \varphi_4(x, y, z, t) = y \end{cases}$$

Ce dernier conduit à $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& z' \\ y &=& t' \\ z &=& \frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}y'-z' \\ t &=& \frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'-t' \end{array}\right.$ ou encore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Une base q-orthogonale est donnée par les colonnes de la matrice intervenant dans la dernière écriture du système linéaire, a savoir, $e_1 = (0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $e_2 = (0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $e_3 = (1,0,-1,0)$, $e_4 = (0,1,0,-1)$.

3. Comme $q(x,y,z,t) = \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2$, la forme quadratique q est de signature $(1,1)$ et de rang 2.

Exercice 2 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit φ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx'+2yy'+2xz'+2x'z-yz'-y'z$ et $q(x,y,z) = x^2+2y^2+4xz-2yz$.

2. On a $q(x,y,z) = x^2+4xz+4z^2+2y^2-2yz-4z^2 = (x+2z)^2+2(y^2-yz+\frac{z^2}{4})-4z^2-\frac{z^2}{2} = (x+2z)^2+2(y-\frac{z}{2})^2-\frac{9}{2}z^2$, la forme quadratique q est de signature $(2,1)$ et de rang 3.

3. Soit $(x,y,z) \in (\text{vect}(1,-1,1))^\perp$, c'est-à-dire $\varphi((1,-1,1),(x,y,z)) = 0$, ou encore $(1,-1,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, ce qui conduit à l'équation suivante : $3x-3y+3z=0$, donc

$$(\text{Vect}(1,-1,1))^\perp = \text{Vect}((1,1,0),(-1,0,1))$$

Exercice 3 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, F désigne le sous espace vectoriel $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z=0\}$.

1. Remarquons d'abord que $\dim F^\perp = 1$ car $\dim F = 2$. Puisque $(1,2,-1)$ est un vecteur non nul de $F^\perp$, on a donc $F^\perp = \text{vect}(1,2,-1)$.

2. Soit $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   2.1 Le vecteur $e = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$ est un vecteur unitaire de la droite vectorielle $F^\perp$, donc $p_{F^\perp}(w) = \langle w,e\rangle e = \frac{a+2b-c}{6}(1,2,-1) = \frac{1}{6}(a+2b-c, 2a+4b-2c, -a-2b+c)$

   2.2 $d(w,F) = \|w-p_F(w)\| = \|p_{F^\perp}(w)\| = \dfrac{|a+2b-c|}{\sqrt{6}}$.

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Première partie : Une caractérisation des endomorphismes antisymétriques

1. Soit $x,y \in E$, on a $\langle u(x),x\rangle = \langle x,u^*(x)\rangle = -\langle x,u(x)\rangle$, donc $2\langle u(x),x\rangle = 0$, puis $\langle u(x),x\rangle = 0$.

2. L'implication directe est le résultat de la question précédente. Supposons maintenant que pour tout $x \in E$, $\langle u(x),x\rangle = 0$. Soit $x,y \in E$, on a $\langle u(x+y),x+y\rangle = 0$, donc $\langle u(x),x\rangle + \langle u(x),y\rangle + \langle u(y),x\rangle + \langle u(y),y\rangle = 0$, ainsi $\langle u(x),y\rangle = -\langle u(y),x\rangle = \langle x,-u(y)\rangle$, il vient alors que $u = -u^*$, et donc u antisymétrique.

3. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans cette base. Notons d'abord que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^tA$. Ainsi u est antisymétrique si, et seulement si, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(-u)$ si, et seulement si, ${}^tA = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = -A$.

Deuxième partie :
Valeurs propres

Dans cette partie, u est un endomorphisme antisymétrique de E.

4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre de u associé à λ. Puisque $\langle u(x), x\rangle = 0$, on a donc $\lambda\|x\|^2 = 0$, donc $\lambda = 0$.

5. On a $(u^2)^* = (u^*)^2 = (-u)^2 = u^2$, donc u^2 est un endomorphisme symétrique, d'après le théorème spectral, u^2 est diagonalisable.

6. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$ et x un vecteur propre de u^2 associé à λ. On a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = -\langle u^2(x), x\rangle = -\lambda\langle x, x\rangle = -\lambda\|x\|^2$, donc $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$.

Troisième partie :
Antisymétrique et nilpotent

Soit u un endomorphisme antisymétrique de E. On suppose dans cette partie que u est nilpotent.

7. Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $u^r = 0$, donc $(u^2)^r = u^{2r} = 0$, par suite u^2 nilpotent.

8. u^2 est un endomorphisme symétrique, d'après le théorème spectral, il est (orthogonalement) diagonalisable. Il existe une base (orthonormale) $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de u^2 est diagonale. Posons
$$D = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
Comme u^2 est nilpotent, la matrice D est alors nilpotente, par suite $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, ou encore $D = 0$. Il vient alors que $u^2 = 0$.

9. Soit $x \in E$. On a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = -\langle u^2(x), x\rangle = 0$ (car $u^2 = 0$).

10. D'après la question précédente, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = 0$, donc $u(x) = 0$. Ainsi $u = 0$.