Examen (Algèbre 5)

φ Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. q

LPEM

Questions zéro

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice ${}^tAA + {}^tA + A$ est diagonalisable.

Exercice 1

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + yz$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, en précisant φ la forme bilinéaire symétrique associée à q.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la signature de q.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Posons $F = \ker f$

1. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) = 1$.
3. En déduire qu'il existe $u_0 \in F^{\perp}$ tel que $f(u_0) = 1$.
4. Soit $v \in E$.
   - 4.1 Montrer que $p_{F^{\perp}}(v) = f(v)u_0$.
   - 4.2 En déduire que $d(v, F) = |f(v)| \|u_0\|$

Exercice 3

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E c'est-à-dire $p^2 = p$.

1. On suppose dans cette question que p est symétrique c'est-à-dire $p^* = p$. Montrer que

$$\ker p \perp \operatorname{Im} p$$

2. On suppose dans cette question que $\ker p \perp \operatorname{Im} p$.
   - 2.1 Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.
   - 2.2 En déduire que p est symétrique c'est-à-dire $p^* = p$.