Examen (Algèbre 5)

φ Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. q

LPEM

Corrigé

Questions zéro

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tAA + {}^tA + A$ est une matrice réelle symétrique, d'après le théorème spéctral elle est diagonalisable, en effet ;
${}^t({}^tAA + {}^tA + A) = {}^tA^t({}^tA) + {}^t({}^tA) + {}^tA = {}^tAA + {}^tA + A$.

Exercice 1
Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + yz$$

1. On a $q(\lambda(x, y, z)) = q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 yz = \lambda^2 q(x, y, z)$.
Pour $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on a $q(u + v) - q(u) - q(v) = 2xx' + yz' + zy'$. L'application $(u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v)$ est une forme bilinéaire symétrique (en vérifiant la linéarité seulement par rapport à l'une des variables). Donc q est une forme quadratique dont la forme bilinéaire symétrique associée est donnée par : $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v)) = xx' + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}zy'$

2. La matrice de φ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. $q(x, y, z) = x^2 + yz = x^2 + \frac{1}{4}(y + z)^2 - \frac{1}{4}(y - z)^2$, donc q est de signature $(2, 1)$.
Notons que la famille des formes linéaires $l_1 : (x, y, z) \mapsto x$, $l_2 : (x, y, z) \mapsto y+z$, $l_3 : (x, y, z) \mapsto y-z$ est libre (base de l'epace dual $(\mathbb{R}^3)^*$).

Exercice 2
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Posons $F = \ker f$

1. f étant une forme linéaire non nulle donc $\ker f$ est un hyperplan de E c'est-à-dire F est de dimension $n - 1$.

2. $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ (f surjective), en particulier $1 \in \mathbb{R} = \operatorname{Im} f$, par suite il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = 1$.

$\boxed{3.}$ On a $E = F^\perp \oplus F$, donc il existe $(u_0, u_1) \in F^\perp \times F$ tel que $u = u_0 + u_1$. Comme $u_1 \in F = \ker f$, il vient alors que $1 = f(u) = f(u_0) + f(u_1) = f(u_0)$.

$\boxed{4.}$ Soit $v \in E$.

$\boxed{4.1}$ On a $v = f(v)u_0 + (v - f(v)u_0)$. Clairement $f(v)u_0 \in F^\perp$ (car $u_0 \in F^\perp$). On a aussi $v - f(v)u_0 \in F$ car $f(v - f(v)u_0) = f(v) - f(v)f(u_0) = f(v) - f(v) = 0$. D'où

$$v = \underbrace{f(v)u_0}_{\in F^\perp} + \underbrace{(v - f(v)u_0)}_{\in F}$$

On en déduit alors que $p_{F^\perp}(v) = f(v)u_0$.

$\boxed{4.2}$ On a $d(v, F) = \|v - p_F(v)\| = \|p_{F^\perp}(v)\| = \|f(v)u_0\| = |f(v)|\|u_0\|$.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E c'est-à-dire $p^2 = p$.

$\boxed{1.}$ On suppose dans cette question que p est symétrique c'est-à-dire $p^* = p$. Soit $x \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $z \in E$ tel que $y = p(z)$. On a $\langle x, y\rangle = \langle x, p(z)\rangle = \langle p^*(x), z\rangle = \langle p(x), z\rangle = 0$ (car $p(x) = 0$). Ainsi les sous espaces vectoriels $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux.

$\boxed{2.}$ On suppose dans cette question que $\ker p \perp \operatorname{Im} p$.

$\boxed{2.1}$ Soient $x, y \in E$. On a $x - p(x) \in \ker p$ (car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$) et $p(y) \in \operatorname{Im} p$, donc $\langle x - p(x), p(y)\rangle = 0$, par suite $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

$\boxed{2.2}$ Soient $x, y \in E$. D'après la question précédente $\langle p(x), y\rangle = \langle y, p(x)\rangle = \langle p(y), p(x)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$, donc $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$, ainsi $p = p^*$.