Groupes et sous groupes

Exercice 1

Soit G un groupe de neutre e tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.
Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 2

Soit G un groupe et H un sous groupe de G. Soit $x \in G$ on pose

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} , \quad h \in H\}$$

Montrer que xHx^{-1} est un sous groupe de G.

Exercice 3

Soit G un groupe. On pose $Z(G) = \{x \in G \ , \ \forall y \in G \ \ xy = yx\}$.
Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G (appelé le centre de G)

Exercice 4

Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable par la loi de G.

1. Montrer que si $h \in H$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h^N = e$.
2. En déduire que H est un sous groupe de G.

Exercice 5 (Union de deux sous groupes)

Soit G un groupe , H et K deux sous groupes de G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si, et seulement si, $H \subseteq G$ ou $G \subseteq H$.

Exercice 6

Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ tel que $x \neq e$ et $x^2 = e$

Exercice 7 (Les sous groupes de $\mathbb{R}$)

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.On suppose que $G \neq \{0\}$

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure a.
2. Montrer que $a \in G$.
3. On suppose que $a > 0$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$
4. On suppose que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique non constante continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une plus petite période. c-a-d: $\{T \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x+T) = f(x)\}$ à un plus petit élément.
6. Soi $H = \{n + p\sqrt{2}, \ \ n, p \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. De quel type est-il?
7. Montrer que $\{\cos n \ \ / \ \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 8

Soit G un groupe de neutre e et H une partie de G contenant e. Pour $g \in G$ on définit

$$gH := \{gh \ / h \in H\}$$

1. Montrer que si H est un sous groupe de G, alors la famille $(gH)_{g\in G}$ forme une partition de G.
2. Montrer que si la famille $(gH)_{g\in G}$ forme une partition de G alors H est un sous groupe de G.

Exercice 9

Soit G un groupe . H et K deux sous groupes de G, on note

$$HK = \{hk \ / h \in H \ , k \in K\}$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. HK est un sous groupe de G
2. KH est un sous groupe de G
3. $HK \subset KH$
4. $KH \subset HK$

Exercice 10

Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$ on note $i_g : G \to G$ l'application définie par $i_g(x) = g^{-1}xg$

1. Montrer que pour tout $g \in G$, i_g est automorphisme de G
   On pose $\text{Fix}(i_g) = \{x \in G\ ,\ i_g(x) = x\}$
2. Montrer que $\text{Fix}(i_g)$ est un sous groupe de G
3. Démontrer que $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(i_g) = Z(G)$

Exercice 11

Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 12

Soit G un groupe.

1. Montrer que si $x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupes alors G est commutatif.
2. Montrer que si $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de groupes alors G est commutatif.
3. Montrer que si $x \mapsto x^3$ est un morphisme de groupes surjectif alors G est commutatif.

Exercice 13

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre impair. Montrer que $x \mapsto x^2$ est surjectif.

Exercice 14

Soit G un groupe. On appelle commutateur de x et y l'élément

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

On appelle sous groupe dérivé de G noté $D(G)$ le sous groupe engendré par l'ensemble des commutateurs.

1. Décrire $D(G)$ lorsque G est commutatif.
2. Montrer que si f est un automorphisme de G alors $f(D(G)) \subseteq D(G)$.

Exercice 15

Soit G un groupe et A une partie de G. On désigne par $Z(A)$ le centralisateur de A c'est-à-dire $Z(A) = \{g \in G\ .\ \forall a \in A,\ \ ga = ag\}$

1. Montrer que $Z(A)$ est un sous groupe de G.
2. Montrer que $Z(A) = Z(\langle A \rangle)$.

Exercice 16

Soit G un groupe et H un sous groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 17

Soit G un groupe.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène alors G est abélien.

Exercice 18

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^n $(n \in \mathbb{N})$.

1. En considérant l'action de G sur lui-même par conjugaison, montrer que $Z(G) \neq \{e\}$.

2. En déduire que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 19

Soit G un groupe, H et H' deux sous-groupes finis de G. Montrer que si $o(H)$ et $o(H')$ sont premiers entre eux alors $H \cap H' = \{e\}$.

Exercice 20

Soit n un entier > 1.

1. Vérifier que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de la multiplication est un monoïde.
2. On note M_n l'ensemble des éléments inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $M_n = \{\overline{k} \ / \ k \wedge n = 1\}$.
3. Déterminer M_p lorsque p est un nombre premier.
   Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe monogène.
4. Montrer que pour tout $f \in \text{Aut}(G)$, $f(g)$ est un générateur de G.
5. On suppose dans cette question que G est cyclique d'ordre n.
   - 5.1 Soit k un entier premier avec n avec $1 \leq k \leq n-1$. Montrer que l'application $h : G \to G$ définie par $h(x) = x^k$ est un automorphisme de G.
   - 5.2 Soit h un automorphisme de G. Montrer que montrer qu'il existe k un entier premier avec n tel que $1 \leq k \leq n-1$ et $h(g) = g^k$. En déduire que pour tout $x \in G$, $h(x) = x^k$.
   - 5.3 Montrer que $\text{Aut}(G)$ est isomorphisme à M_n.
   - 5.4 En déduire que $\text{Aut}(G)$ est groupe abélien.
6. On suppose dans cette question que G monogène infini. Montrer que le groupe $\text{Aut}(G)$ est cyclique d'ordre 2.

Exercice 21

Soit G un groupe et H un sous groupe distingué de G.
On suppose que le groupe quotient G/H est fini d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^n \in H$.
2. Montrer que si k est un entier premier avec n et $x \in G$ tel que $x^k \in H$ alors $x \in H$.

Exercice 22

Soit G un groupe. Pour $g \in G$, on note $i_g : G \to G$ l'application définie par $i_g(x) = g^{-1}xg$.

1. Pour $g \in G$. Montrer que i_g est un automorphisme de G.
   Un automorphisme de la forme i_g s'appelle un automorphisme intérieur de G, l'ensemble des automorphismes intérieurs de G se note $\text{Int}(G)$.
2. Montre que $\text{Int}(G)$ est un sous groupe de $\text{Aut}(G)$ (pour la loi de composition).
3. Montrer que l'application $\varphi : G \to \text{Int}(G)$ définie par $\varphi(g) = i_g$ est un morphisme de groupes.
4. En déduire que $G/Z(G)$ et $\text{Int}(G)$ sont isomorphismes.

Exercice 23

Soit G un groupe non trivial agissant sur un ensemble X. On suppose que pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, il existe un unique $x \in X$ tel que $gx = x$. On note $A = \{x \in X \ / \ \text{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$.

1. Montrer que A est stable par G.
2. On note $m = |A/G|$, et $A/G = \{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}\}$. Pour $1 \leq i \leq m$, on note $m_i = \text{Stab}_G(a_i)$. En considérant l'ensemble $Y = \{(g,x) \in (G \setminus \{e\}) \times X \ / \ gx = x\}$. Montrer que
$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$
3. En déduire que $m = 1$.

4. Démontrer qu'il existe $x \in X$ tel que pour tout $g \in G$, $gx = x$.

Exercice 24 (Le Lemme d'Ore)

Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous groupe de G d'indice p.

1. Montrer que $(h, xH) \mapsto hxH$ définit une action du groupe H sur l'ensemble G/H.
2. Montrer que les orbites de cette action sont réduites à des points.
3. Montrer que H est sous groupe distingués de G.

Exercice 25

Soit p un nombre premier. On appelle p-groupe tout groupe de cardinal une puissance de p.

1. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble fini X. On note X^G l'ensemble des points fixes sous G
$$X^G = \{x \in X \ / \ \forall g \in G\ ,\ gx = x\}$$
Montrer que p divise $|X| - |X^G|$.
2. En déduire que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$.
3. À quelle condition un p-groupe est-elle simple?

Exercice 26

Soit G un groupe de cardinal n opérant transitivement sur un ensemble de cardinal m.

1. Soient $x, y \in G$. Montrer que les stabilisateurs de x et y sont des sous-groupes conjugués dans G.
2. Montrer que m divise n.

Exercice 27

Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de cardinal r. On pose $B = \dfrac{1}{r}\left(\sum\limits_{A \in G} A\right)$.

1. Montrer que pour tout $A \in G$, $AB = B$.
2. Montrer que B est la matrice d'un projecteur dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$..
3. Montrer que $\sum\limits_{A \in G} \mathrm{tr}(A)$ est un entier divisible par r.
4. Montrer que si $\sum\limits_{A \in G} = 0$, alors $\sum\limits_{A \in G} A = 0$.
5. Montrer que tout matrice $A \in G$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 28

On muni $\mathbb{R}^n$ de la forme quadratique $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et φ sa forme polaire. Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que l'application $\psi : (x, y) \mapsto \psi(x, y) = \sum\limits_{g \in G} \varphi(g(x), g(y))$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
2. Montrer que pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\psi(g(x), y) = \psi(x, g^{-1}(y))$$
3. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G, alors il admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.