Examen blanc

u Groupes anneaux et corps A

LPEM

Définition

Soit A un anneau unitaire. Un élément $e \in A$ est dit idempotent si $e^2 = e$.

Exercice 1 Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p.

1. Soit $a \in G$ différent de l'élément neutre de G. Montrer que $G = \langle a \rangle$. En déduire que G est commutatif.
2. Montrer que G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Soit G un groupe d'ordre 15.

1. Montrer qu'il existe $a \in G$ tel que $a^3 = e$ et $a^2 \neq e$.
2. Montrer qu'il existe $b \in G$ tel que $b^5 = e$ et $b^4 \neq e$.
3. Montrer que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.
4. On suppose dans cette question que $ab = ba$.
   - 4.1 Quelle est l'ordre de l'élément ab.
   - 4.2 Montrer que G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit A un anneau unitaire, tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que A est commutatif.
2. Montrer que si A est intègre alors A est un corps isomorphisme à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

PROBLÈME

Soit A un anneaux commutatif unitaire.

Première partie :
Éléments idempotents

Soient A_1, A_2 deux anneaux commutatifs unitaires non réduits à un seul élément.

1. Montrer que si e est un élément idempotent de A, alors il en est de même pour $1-e$.
2. Montrer que si A est intègre alors 0 et 1 sont les seuls éléments idempotents de A.
3. Justifier que $(1,0)$ est un élément idempotent de $A_1 \times A_2$.
4. Montrer que si A est isomorphe à $A_1 \times A_2$ alors A admet un élément idempotent différent de 0 et de 1.

Deuxième partie :
Théorème chinois

Soient I et J deux idéaux de A tels que $I+J=A$. Soit $\varphi : A \to (A/I)\times(A/J)$ l'application définie par $\varphi(x)=(\overline{x},\overline{x})$.

5. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux .
6. Justifier l'existence de $(i_0, j_0)\in I\times J$ tel que $i_0+j_0=1$.
7. Soit x, y deux éléments de A. On pose $a = xj_0 + yi_0$.
   - 7.1 Montrer que $a-x\in I$ et $a-y\in J$.
   - 7.2 En déduire que le morphisme φ est surjectif
8. Montrer que $A/(I\cap J)$ est isomorphe à $(A/I)\times(A/J)$.

Troisième partie :
Idempotent et produit

On suppose que A admet un élément idempotent e différent de 0 et de 1. Notons I (respectivement J) l'idéal de A engendré par e (respectivement par $1-e$).

9. Montrer que $I+J=A$.
10. Montrer que $I\cap J=\{0\}$.
11. Montrer que A est isomorphe au produit de deux anneaux non réduits à un seul élément.