Examen (Algèbre 6)

B A

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Question zéro

Montrer qu'un sous groupe d'indice 2 est distingué.

Exercice 1
Soit G un groupe de neutre e tel que pour tout $x \in E$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 2
Soit G un groupe commutatif d'ordre 22 et de neutre e.

1. Montrer qu'il existe $a \in G$ tel que $a \neq e$ et $a^2 = e$.
2. Montrer que G admet un élément d'ordre 11.
3. Montrer que G est cyclique.

Exercice 3 Soit A un anneau commutatif unitaire tel que pour tout $x \in A$, $x^3 = x$.

1. Montrer que si A est intègre alors A est un corps.
2. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 4
Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires.

1. Justifier que l'anneau $A \times B$ est commutatif et unitaire.
2. Montrer que si I est un idéal de A et J un idéal de B alors $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
   Soit $f : A \times B \to A$ respectivement $g : A \times B \to B$ les applications définies par : $f(x, y) = x$ respectivement $g(x, y) = y$.
3. Montrer que f et g sont des morphismes d'anneaux.
4. Soit K un idéal de $A \times B$.
   - 4.1 Montrer que $I := f(K)$ est un idéal de A et que $J := g(K)$ est un idéal de B.
   - 4.2 Montrer que $K = I \times J$.