# Examen (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Corrigé

## Question zéro

Soit $G$ un groupe et $H$ un sous groupe de $G$ d'indice 2. Soit $x \in G$.
Si $x \in H$, alors $xH = H = Hx$.
Si $x \notin H$, alors dans ce cas (l'ensemble des classes à gauche) $G/H = \{H, xH\}$ en particulier $xH$ est le complémentaire de $H$ dans $G$. De même (l'ensemble des classes à droite) $H \setminus G = \{H, Hx\}$ ainsi $Hx$ est le complémentaire de $H$ dans $G$. On en déduit alors que $xH = Hx$.

**Exercice 1**
Notons que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, donc $x = x^{-1}$.
Soit $(x, y) \in G^2$. On a $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Le groupe $G$ est alors commutatif.

**Exercice 2**
Soit $G$ un groupe commutatif d'ordre 22 et de neutre $e$.

1. 2 est un diviseur premier de $22 = |G|$, d'après le théorème de Cauchy, $G$ admet un élément $a$ d'ordre 2, c'est-à-dire $a \neq e$ et $a^2 = e$.
2. 11 est un diviseur premier de $22 = |G|$, d'après le théorème de Cauchy, $G$ admet un élément $b$ d'ordre 11.
3. Soit $c = ab$ ($a$ d'ordre 2 et $b$ d'ordre 11). L'ordre de $c$ est un diviseur de 22, donc égale à 1, 2, 11 ou 22. En effet $c$ est un élément d'ordre 22 car :
Si $c$ est d'ordre 1, dans ce cas $ab = e$ c'est-à-dire $b = a^{-1}$, par suite $b^2 = (a^2)^{-1} = e$, ce qui n'est pas le cas (car $b$ est d'ordre 11).
Si $c$ est d'ordre 2, dans ce cas $(ab)^2 = e$, par suite $b^2 = (a^2)^{-1} = e$, ce qui n'est pas le cas.
Si $c$ est d'ordre 11, dans ce cas $(ab)^{11} = e$, en particulier $a^{11} = e$, d'où $a = e$, ce qui n'est pas le cas.
On en déduit alors que $c$ est un élément d'ordre 22, et que $G = \langle c \rangle$ est cyclique.

**Exercice 3** Soit $A$ un anneau commutatif unitaire tel que pour tout $x \in A$, $x^3 = x$.

1. Soit $x \in A$ un élément non nul. On a $x^3 = x$, donc $x(x^2 - 1) = 0$, donc $x^2 = 1$ (car $A$ intègre et $x \neq 0$). Ainsi $x$ est un élément inversible (l'inverse est lui même).
2. Soit $P$ un idéal premier de $A$, donc l'anneau $A/P$ est intègre. Pour tout $\overline{x} \in A/P$, on a $\overline{x}^3 = \overline{x}$. D'après le résultat de la question précédente $A/P$ est un corps, et par conséquent $P$ est un idéal maximal.

**Exercice 4**

Soient $A$ et $B$ deux anneaux commutatifs unitaires.

1. Soit $(a,b),(a',b')\in A\times B$, tenant compte la commutativité de $A$ et $B$ on a $(a,b)(a',b')=(aa',bb')=(a'a,b'b)=(a',b')(a,b)$. L'anneau $A\times B$ est commutatif.
   Pour $(a,b)\in A\times B$, on a $(a,b)(1,1)=(a,b)=(1,1)(a,b)$. L'anneau $A\times B$ est unitaire (l'unité est $(1,1)$).

2. On a $(0,0)\in I\times J$. Soient $(x,y),(a,b)\in I\times J$, on a $(x,y)-(a,b)=(x-a,y-b)\in I\times J$ car $x-a\in I$ et $y-b\in J$.
   Soit $(x,y)\in I\times J$ et $(a,b)\in A\times B$. On a $(a,b)(x,y)=(ax,by)$. $I$ et $J$ sont des idéaux, $x\in I$ et $y\in J$, il vient alors que $ax\in I$ et $by\in J$, donc $(ax,by)\in I\times J$.
   Soit $f:A\times B\to A$ respectivement $g:A\times B\to B$ les applications définies par : $f(x,y)=x$ respectivement $g(x,y)=y$.

3. Soit $(a,b),(a',b')\in A\times B$. On a $f((a,b)+(a',b'))=f(a+a',b+b')=a+a'=f(a,b)+f(a',b')$.
   $f((a,b)(a',b'))=f(aa',bb')=aa'=f(a,b)f(a',b')$.
   $f(1,1)=1$. De même pour $g$.

4. Soit $K$ un idéal de $A\times B$.

   4.1 Puisque que $K$ est un sous groupe de $A\times B$, $f(K)$ et $g(K)$ sont des sous groupes respectivement de $A$ et $B$ .
   Soit $x\in f(K)$ et $a\in A$. Il existe $(\alpha,\beta)\in K$ tel que $x=f(\alpha,\beta)$ (en effet $x=\alpha$). Donc $ax=f(a,0)f(\alpha,\beta)=f((a,0)(\alpha,\beta))$. Comme $(\alpha,\beta)\in K$ et $K$ idéal, on a donc $(a,0)(\alpha,\beta)\in K$, par suite $ax=f((a,0)(\alpha,\beta))\in f(K)$.
   Soit $y\in g(K)$ et $b\in B$. Il existe $(\alpha,\beta)\in K$ tel que $y=g(\alpha,\beta)$ (en effet $y=\beta$). Donc $bx=g(0,b)g(\alpha,\beta)=g((0,b)(\alpha,\beta))$. Comme $(\alpha,\beta)\in K$ et $K$ idéal, on a donc $(0,b)(\alpha,\beta)\in K$, par suite $by=g((0,b)(\alpha,\beta))\in f(K)$.

   4.2 Montrer que $K=I\times J$.
   Soit $(x,y)\in K$, on a $x=f(x,y)\in f(K)=I$ et $y=g(x,y)\in g(K)=J$, donc $(x,y)\in I\times J$.
   Soit $(x,y)\in I\times J$, alors $x\in I=f(K)$ et $y\in J=g(K)$. Il existe alors $(a,b)\in K$ et $(a',b')\in K$ tels que $x=f(a,b)$ et $y=g(a',b')$, en particulier $x=a$ et $y=b'$. Maintenant, $(x,y)=(a,b')=(a,0)+(0,b')=(1,0)\underbrace{(a,b)}_{\in K}+(0,1)\underbrace{(a',b')}_{\in K}\in K$.