Devoir Surveillé $N°$ 2

Il sera tenu compte, dans lappréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

u $\mathscr{L}(E)$ PSI

Questions de cours

1. Rappeler la défintion du sous espace propre associé à une valeur propre λ (pour un endomorphisme).
2. Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.
3. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\chi_A = X^2(X-6)$. En déduire le spectre de A.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 2

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de B.
2. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Première partie : Les sous-espaces propres

1. Montrer que la matrice $A + I_3$ est non inversible. En déduire que -1 est une valeur propre de u.

2. Calculer $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. En déduire que 5 est une valeur propre de u.

3. Montrer que $\chi_u = (X+1)^2(X-5)$.

4. Calculer les sous espaces propres de u. ($E_{-1}(u)$ et $E_5(u)$).

5. Montrer que u est diagonalisable.

Deuxième partie : Diagonalisation

On pose $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5)$ où $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,0,-1)$.

6. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

7. Calculer D la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.

8. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

10. Montrer que $(A+I_3)^2(A-5I_3) = 0$.

Troisième partie : Commutant de A

On pose $C(A) := \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ c'est l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

11. Justifier que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

12. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $AM = MA$ si, et seulement si, $DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$.

13. Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $DB = BD$ si, et seulement si, B est de la forme $B = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & d & e\end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

14. En déduire $C(A)$.