Devoir Surveillé $N°$ 2

Il sera tenu compte, dans lappréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

u $\mathscr{L}(E)$ PSI

Corrigé

Questions de cours

1. Cours.
2. Cours.
3. Cours .

Exercice 1

Soit $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. En effectuant les deux opérations élémentaires, $L_3\leftarrow L_3-L_2$, puis $C_2\leftarrow C_2+C_3$, on obtient;

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X-2&-2&-2\\-2&X-2&-2\\-2&-2&X-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-2&-2&-2\\-2&X-2&-2\\0&-X&X\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}X-2&-4&-2\\-2&X-4&-2\\0&0&X\end{vmatrix}=X((X-2)(X-4)-8)=X^2(X-6)$$

En particulier $\mathrm{Sp}(A)=\{0,6\}$.

2. Les sous espaces propres de A :

$$E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_6(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. On a $\dim E_0(A)+\dim E_6(A)=3$, donc la matrice A est diagonalisable.

Exercice 2

Soit $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le polynôme caractéristique de B : $\chi_B=X^2+1$.
2. le polynôme caractéristique de B n'est pas scindé, donc la matrice B est non diagonalisable.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$ est donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

Première partie : Les sous-espaces propres

1. On a, $\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{vmatrix}=0$, donc la matrice $A+I_3$ est non inversible.
La matrice $A-(-1)I_3=A+I_3$ est non inversible donc -1 est une valeur propre de A, donc de u car A et u ont même valeurs propres.

2. $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur non, 5 est une valeur propre de A, donc valeur propre de u.

3. En effectuant les deux opérations élémentaires, $L_3\leftarrow L_3-L_2$, puis $C_2\leftarrow C_2+C_3$, on obtient;

$$\begin{aligned}\chi_A&=\begin{vmatrix}X-1&-2&-2\\-2&X-1&-2\\-2&-2&X-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1&-2&-2\\-2&X-1&-2\\0&-X-1&X+1\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}X-1&-4&-2\\-2&X-3&-2\\0&0&X+1\end{vmatrix}=(X+1)((X-1)(X-3)-8)\\&=(X+1)(X^2-4X-5)=(X+1)^2(X-5).\end{aligned}$$

4. Les sous espaces propres de u :
$E_{-1}(u)=\text{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$ et $E_5(u)=\text{Vect}((1,1,1))$.

5. On a $\dim E_{-1}(u)+\dim E_5(u)=3$, donc u est diagonalisable.

Deuxième partie : Diagonalisation

On pose $\mathscr{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_5)$ où $\varepsilon_1=(1,1,1)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0)$ et $\varepsilon_3=(1,0,-1)$.

6. Le déterminant de $\mathscr{B}'$ dans la base canonique est $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=3$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de E.

7. On a, $u(\varepsilon_1)=5\varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2)=-\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3$. Donc

$$D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

8. P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.
D'après la formule de changement de bases, on a $A=PDP^{-1}$.

9. Par récurrence sur n :
Pour $n=0$: $A^0=I_3$ et $PD^0P^{-1}=PP^{-1}=I_3$, donc $A^0=PD^0P^{-1}$.
Supposons la propriété pour un entier $n\geq 0$, c'est-à-dire $A^n=PD^nP^{-1}$. On a $A^{n+1}=A^nA=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$.
L'égalité est établie par récurrence.

10. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A=(X+1)^2(X-5)$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=0$ c'est-à-dire $(A+I_3)^2(A-5I_3)=0$.

Troisième partie : Commutant de A

On pose $C(A):=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\ /\ AM=MA\}$ c'est l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

11. La matrice nulle commute avec A, donc $0\in C(A)$.
Soient $M,N\in C(A)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $(M+\lambda N)A=MA+\lambda NA=AM+\lambda AN=A(M+\lambda N)$, donc $M+\lambda N\in C(A)$. Ainsi $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

12. $AM=MA$ si, et seulement si, $PDP^{-1}D=DPDP^{-1}$ si, et seulement si, $DP^{-1}MP=P^{-1}MPD$ (en multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1}).

13. Soit $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $DB=BD$. Écrivant B sous la forme $B=\begin{pmatrix}a&x&y\\z&b&c\\t&d&e\end{pmatrix}$. On a

$$DB=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&x&y\\z&b&c\\t&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a&5x&5y\\-z&-b&-c\\-t&-d&-e\end{pmatrix}$$

$$BD=\begin{pmatrix}a&x&y\\z&b&c\\t&d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a&-x&-y\\5z&-b&-c\\5t&-d&-e\end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient, $x=y=z=t=0$.
Réciproquement, on vérifie par un calcul simple qu'une matrice de la forme $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$ commute avec D.

14. $M\in C(A)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP$ commute avec D si, et seulement si, $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$ si, et seulement si, $M=P\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}P^{-1}$ où $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Ainsi

$$C(A)=\left\{P\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}P^{-1}\ /\ a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right\}$$