Thème : Les variables aléatoires

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Variables aléatoires

Par $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, on désigne la tribu borélienne.

Définition 1.1

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, p)$, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$; $X^{-1}(A) \in \mathscr{T}$.

Remarque: On peut remplacer les boréliens dans la définition précédente, par:

1. Les intervalles de la forme $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. ou les segments de $\mathbb{R}$,
3. ou les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2

L'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

Théorème et définition 1.3

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur cet espace. L'application suivante définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$;

$$B \mapsto p(X^{-1}(B))$$

définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Cette probabilité est appelée loi de X.

Définition 1.4

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, p)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X caractérise sa loi.

1.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 1.5

Une variable aléatoires réelle X est dite discrète si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Si X est une variable aléatoire discrète, la famille $(p(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ détermine bien la loi de X, on l'appelle aussi la loi de X ; en effet, pour $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$p(X^{-1}(B)) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap B} p(X = x)$$

Définition 1.6

Soit X une variable aléatoire discrète.

1. *Si $X(\Omega)$ est fini, on appelle espérance de X le réel; $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x)$.*
2. *Si $X(\Omega) = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X admet une espérance si la série $\sum_n x_n p(X = x_n)$ est absolument convergente, dans ce cas on appelle espérance de X le réel; $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n p(X = x_n)$.*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, p)$. Alors X admet une espérance si la famille $(xp(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Si c 'est le cas l'espérance de X est définie par $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x)$.

Proposition 1.7

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, p)$.

1. *Si X et Y admettent des espérances et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \lambda Y$ admet une espérance et on a $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$.*

2. *Si $|X| \leq Y$ et Y admet une espérance alors X admet une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$.*

Théorème 1.8 (de transfert)

Soit X une variables aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_n f(x_n)p(X = x_n)$ est absolument convergente. Si c'est le cas on a, $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)p(X = x_n)$.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. Alors $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(f(x)p(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Si c 'est le cas, on a $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)p(X = x)$.

La formule de transfert permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ à l'aide de la loi de X.

2 Variable aléatoire à densité

Soit X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et F_X sa fonction de répartition,

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
3. F_X admet une limite à droite et une limite à gauche en chaque point et on a; $\lim_{x^+} F_X = F(x)$ et $\lim_{x^-} F_X = F_X(x) - p(X = x)$.

En particulier F_X est continue en x si, et seulement si, $p(X = x) = 0$.

Définition 2.1

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On dit que X est à densité si F_X est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La fontion définie par $f(x) = F'_X(x)$ si F_X est dérivable en x et $f(x) = 0$ sinon, s'appelle une densité de X.

Si X est une variable aléatoire de densité f, alors

1. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
3. Pour tout intervalle I d'extrémités a, b $(a \leq b)$, $p(X \in I) = \int_{a}^{b} f(t)dt$.

Définition 2.2

Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X admet un espérance si la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas l'espérance de X est le réel $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

Soient X, Y deux variables aléatoires à densités.

1. Si X et Y admettent des espérances et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \lambda Y$ admet une espérance et on a $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$.
2. Si $|X| \leq Y$ et Y admet une espérance alors X admet une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$.

Théorème 2.3 (de Transfert)

Soit X une variable aléatoire de densité f et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $\varphi(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto \varphi(t)f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)dt$.

2.1 Moment et variance

Définition 2.4

Soit X une variable aléatoire et $k \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre k, si X^k admet une espérance. le moment d'ordre k est le réel $\mu_k(X) = E(X^k)$.

Théorème 2.5

Soit X une variable aléatoire et $k \leq n$ deux entiers. Si X admet un moment d'ordre n alors elle admet un moment d'ordre k.

Définition 2.6

Soit X une variable aléatoire. On dit que X admet une variance si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Si c'est le cas la variance de X est le réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Proposition 2.7

Soit X une variable aléatoire. Alors X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2. De plus $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Si X admet une variance et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX+b$ admet une variance et on a $V(aX+b) = a^2V(X)$.

3 Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 3.1 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et $a > 0$. Alors

$$p(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Si X est positive et $a > 0$, alors $p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Théorème 3.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire admettant une variance et $a > 0$. Alors

$$p(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

4 Indépendance

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_m$ des événements. On rappelle que les événements $A_1, \ldots, A_m$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $p(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} p(A_i)$. En particulier deux événements A et B sont mutuellement indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
L'indépendance est un protocole qui permet de transformer la probabilité d'une intersection en produit de probabilités.

Définition 4.1

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires de cette famille sont (mutuellement) indépendantes si pour toute partie finie $J \subseteq I$, pour toute famille de Boréliens $(A_i)_{i\in J}$, les évènements $((X_i \in A_i))_{i\in J}$ sont indépendants, c'est-à-dire $p(\cap_{i\in J}(X_i \in A_i)) = \prod\limits_{i\in J} p(X_i \in A_i)$

Remarques :

1. Si $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes. Alors les variables aléatoires $X_i, i \in I$ sont indépendantes si, et seulement si, pour toute famille finie de nombres $(x_i)_{i\in J}$ $(J \subseteq I)$, $p(\cap_{i\in J}(X_i = x_i)) = \prod\limits_{i\in J} p(X_i = x_i)$.

2. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et $n_1 < \ldots, n_r < n$, alors $f_1(X_1, \ldots, X_{n_1-1}), f_2(X_{n_1}, \ldots, X_{n_2-1}), \ldots, f_{r+1}(X_{n_r}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition 4.2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes.

1. *Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent des espérances, alors la variable aléatoire $X_1 \ldots X_n$ admet une espérance et on a $E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n)$.*

2. *Si $X_1,\dots,X_n$ admettent des variances, alors la variable aléatoire $X_1+\dots+X_n$ admet une variance et on a $V(X_1+\dots+X_n)=V(X_1)+\dots+V(X_n)$.*

5 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la fonction définie par $G_X(t)=E(t^X)$.

1. Montrer que pour tout $t\in[-1,1]$, $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(X=n)t^n$.
2. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $t\in[-1,1]$, $G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$.

Exercice 2

Soit X,Y deux variables aléatoires.

1. Justifier que $|XY|\le\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$.
2. Montrer que si X et Y admettent des variances, alors XY admet une espérance, et que $X+Y$ admet une variance.

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivants des loi de Poisson de paramètres respectives λ,λ'. Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Exercice 4 (Zêta de Riemann)

Pour $x>1$, on rappelle que $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

On fixe un réel $x>1$. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},p)$ dont la loi est donnée par; $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $p(X=n)=\frac{1}{\zeta(x)n^x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, A_n désigne l'ensemble des multiple strictement positifs de n.

1. Pour $n\ge1$, calculer $p(X\in A_n)$.
2. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Montrer que les événements $(X\in A_p)$, $p\in\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $(B_n)_n$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que $p(\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n)=\prod_{n\in\mathbb{N}}p(B_n)$.
4. En déduire que $p(X=1)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^x}\right)$.
5. Montrer que $\zeta(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^x}\right)^{-1}$.

Exercice 5 (sans mémoire)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Montrer que pour tout $t,s\in\mathbb{R}^+$, $p(X>s+t|_{X>t})=p(X>s)$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi normale centré réduite, et on note Φ sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $p(X\ge x)\le\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $x>0$, $p(X\ge x)\le\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire de loi normale centré réduite. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g'(X)$ admet une espérance. Montrer que $E(g'(X)-Xg(X))=0$.

Problème :

Dans tout le problème λ désigne un réel strictement positif, et Z_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On désigne par $\mathscr{F}$ (respectivement $\mathscr{F}_\infty$) l'espace des applications (respectivement des applications bornées) de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème T_λ est l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ définie pour tout $f\in\mathscr{F}$ par $T_\lambda(f): n\mapsto \lambda f(n+1)-nf(n)$.
On note K_λ l'ensemble des $f\in\mathscr{F}$ tel que $f(Z_\lambda)$ admet une espérance.
Toutes les variables aléatoires mise en jeu dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{T},p)$.

Première partie
Loi de Poisson

1. Calculer la fonction génératrice de Z_λ.

2. 2.1 Montrer que pour tous $u,r>0$, on a $p(Z_\lambda\geq r)\leq e^{-ru}E(e^{uZ_\lambda})$.

   2.2 Montrer que pour tout $r\geq\lambda$, on a $p(Z_\lambda\geq r)\leq e^{-r\ln r+r\ln\lambda+r-\lambda}$.

   2.3 Montrer que pour tout $r\in]0,\lambda]$, on a $p(Z_\lambda\leq r)\leq e^{-r\ln r+r\ln\lambda+r-\lambda}$.

3. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\ln(k!)\leq(k+1)\ln(k)-k+1$.

Deuxième partie :
Opérateur de Chen-Stein

4. Montrer que K_λ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
   Pour $f\in K_\lambda$, on pose $\|f\|_{(\lambda)}=E(|f(Z_\lambda)|)$.

5. Montrer que $\|.\|_{(\lambda)}$ définit une norme sur K_λ.

6. Montrer que pour tout $f\in\mathscr{F}_\infty$, $T_\lambda(f)\in K_\lambda$.

7. Montrer que T_λ est une application linéaire continue de $\mathscr{F}_\infty$ dans K_λ.

8. Soit $f\in\mathscr{F}_\infty$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance. Montrer que $T_\lambda(f)(X)$ admet une espérance.

9. Soit $f\in\mathscr{F}_\infty$. Montrer que $E(T_\lambda(f)(Z_\lambda))=0$.

10. Soit $h\in\mathscr{F}_\infty$ tel que $E(h(Z_\lambda))\neq 0$. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f\in\mathscr{F}_\infty$ telle que $T_\lambda(f)=h$.

11. Soit $h\in\mathscr{F}_\infty$ et f_h l'application définie par $f_h(0)=0$ et pour tout $k\geq 0$, $f_h(k+1)=\frac{1}{\lambda p(Z_\lambda=k)}\sum_{j=0}^{k}p(Z_\lambda=j)h(j)$.

    11.1 Montrer que $T_\lambda(f_h)=h$.

    11.2 En déduire qu'il existe une unique application $f\in\mathscr{F}$ telle que $f(0)=0$ et $T_\lambda(f)=h$.

12. Montrer que si $h\in\mathscr{F}_\infty$ et $E(h(Z_\lambda))=0$, alors $\|f_h\|_\infty\leq e\|h\|_\infty$. On pourra utiliser l'inégalité suivante; pour tout $x\in[0,1[$, $\ln(1-x)\leq -x$.

Troisième partie:
Une caractérisation de la loi de Poisson

Dans cette partie X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance telle que pour tout $f\in\mathscr{F}_\infty$, $E(T_\lambda(f)(X))=0$.

13. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p(X=n)=\frac{\lambda}{n}p(X=n-1)$. Considérer $f=1_{\{n\}}$.

14. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}p(X=0)$.

15. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.