Contôle (Algèbre 2)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

G H

LEEM

Montesquieu

✾ Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'un idéal.
2. Rappeler la définition d'un morphisme d'anneaux.

Exercice 1

Soit G un groupe et $f : G \to G$ l'application définie par $f(g) = g^2$.

1. Montrer que si G est commutatif alors f est un morphisme de groupes.
2. On suppose que f est un morphisme de groupes.
   - 2.1 Montrer que pour tous $g, g' \in G$, $g^2 g'^2 = gg'gg'$.
   - 2.2 En déduire que G est un groupe commutatif.

Exercice 2

On considère les deux permutations de S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer σ^{-1}.
2. Calculer σ^2.
3. Décomposer σ et σ' en produit de cycles disjoints.
4. Calculer les signatures de σ et σ'.

Exercice 3

On considère $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ est un sous anneau (unitaire) de $\mathbb{C}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que si x est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ alors $x = 1$ ou $x = -1$.
Pour $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, on pose $f(z) = \overline{z}$.
3. Montrer que f est un morphisme d'anneaux.
4. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ est inversible alors $f(z)$ est inversible.
5. Déterminer $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{3}])$.
6. On pose $J = \{2a + i2b\sqrt{3} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Exercice 4

Soit $A = \mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $P \in A$ par $f(P) = \widetilde{P}(1)$.

1. Montrer que f est un morphisme d'anneaux.
2. Soit $I = \{P \in A \ / \ \widetilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de A.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END