Contôle (Algèbre 2)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

P $P(z)$

LEEM

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Enoncer le théorème de D'Alembert-Gauss.
2. Enoncer le théorème de Bézout.

Exercice 1 (Un polynôme et des questions aléatoires)
On considère le polynôme $P = X^5 - 2X + 1$

1. Justifier que $X - 1$ divise P.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X(X+1)$.
3. Le polynôme est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier.

Exercice 2 (Factorisation)
On considère le polynôme $P = X^4 - 1$.

1. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

PROBLÈME

Autour du polynôme $(X+1)^n - X^n$

Dans tout le problème $n \geq 2$ désigne un entier naturel et Q le polynôme $Q = (X+1)^n - X^n$.
$\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines $n$èmes de l'unité c'est-à-dire $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$. On admet que

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$$

Première partie :
Une question préliminaire

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on rappelle que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Deuxième partie :
Les racines de P

2. Montrer que $\deg(Q) = n-1$ et que $\mathrm{dom}(Q) = n$.
3. Justifier que 0 n'est pas une racine de Q.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine complexe de Q.
   - 4.1 Justifier que $z \neq 0$.
   - 4.2 Montrer que $\frac{z+1}{z} \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
   - 4.3 Montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$z = \frac{-ie^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2\sin(\frac{k\pi}{n})}$$

5. En exploitant les résultats des questions précédentes, montrer que

$$Q = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + \frac{ie^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2\sin(\frac{k\pi}{n})}\right)$$

Troisième partie :
Applications

6. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

7. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ie^{-\frac{ik\pi}{n}}}{\sin(\frac{k\pi}{n})} = n-1$$