Contôle (Algèbre 3)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Montesquieu

✾ Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Questions de Cours

1. Rappeler la définition de la somme de deux sous espaces vectoriels F et G.
2. Rappeler la formule de Grassmann.
3. Rappeler la définition du noyau et image d'une application linéaire.
4. Rappeler la formule du rang.

Exercice 1
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y-z &= 2 \\ 2x+2y+z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $f(\ker f^2) \subseteq \ker f \cap \operatorname{Im} f$.
2. Montrer en effet que $f(\ker f^2) = \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 3 Soit M la matrice suivante $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$.
2. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

PROBLÈME

Autour des endomorphismes cycliques

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Un endomorphisme f de E est dit cyclique s'il existe un vecteur v de E tel que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit génératrice de E.

Première partie : Un exemple

Dans cette partie $E = \mathbb{K}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^3$. Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = (1,-1,0)$, $f(e_2) = (1,1,0)$ et $f(e_3) = (0,2,0)$.

1. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$, $f(x,y,z) = (x+y, -x+y+2z, 0)$
   On pose $v = (1,1,1)$
2. Calculer $f(v)$, puis $f^2(v)$.
3. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de E.
4. En déduire que f est cyclique.

Deuxième partie : Cas d'endomorphisme nilpotent

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

5. Justifier qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$.
6. Justifier que $v \neq 0$.
7. Montrer que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de E.
8. En déduire que f est un endomorphisme cyclique.

Troisième partie : Commutant d'un endomorphisme cyclique

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme cyclique de E.

9. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), f^2(v))$ soit une base de E.
10. Soit g et h deux endomorphismes de E qui commutent avec f c'est-à-dire $fg = gf$ et $hf = fh$ et vérifiant $h(v) = g(v)$.
    - 10.1 Montrer que $h(f(v)) = g(f(v))$.
    - 10.2 Montrer que $h(f^2(v)) = g(f^2(v))$.
    - 10.3 En déduire que $h = g$.
11. Soit g un endomorphisme qui commutent avec f.
    - 11.1 Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tel que $g(v) = av + bf(v) + cf^2(v)$.
      On pose $h = a\mathrm{Id}_E + bf + cf^2$.
    - 11.2 Justifier que $h(v) = g(v)$.
    - 11.3 En déduire que $g = a\mathrm{Id}_E + bf + cf^2$.