# Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

## Notations

Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
☞ On désigne par $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ polynôme en $f$ c'est-à-dire $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \ / P \in \mathbb{K}[X]\}$.

## Questions de cours

1. Donner la défintion d'un hyperplan.
2. Donner la défintion d'une forme linéaire.
3. Donner la défintion d'un sous espace stable pour un endomorphisme.
4. Enoncer le théorème de décomposition des noyaux.

**Exercice 1** Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ l'application définie, pour tout $P \in E$, par $\varphi(P) = P(1)$.

1. Montrer que $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$.
2. En déduire que $F := \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ X-1 \quad \text{divise} \ P\}$ est un hyperplan de $E$.

**Exercice 2** Soit $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$. En déduire le spectre de $A$.
2. Déterminer les sous espaces propres de $A$.

**Exercice 3** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaire sur $E$.

1. Justifier que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forme une base de $E^*$.
   Soit $f : E \to \mathbb{K}^n$ l'application définie, pour tout $x \in E$, par $f(x) = ((\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)))$.
2. Justifier que $f$ est une application linéaire.
3. Supposons que $\ker f \neq \{0\}$. Soit $e$ un vecteur non nul de $\ker f$.

3.1 Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ tel que $\varphi(e) = 1$.

3.2 Trouver une contradiction.

4. Montrer que $f$ est un isomorphisme.

# PROBLÈME

Dans tout le problème $n$ est un entier $\geq 2$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes de $E$.

## Première partie : existence d'un vecteur propre commun

On suppose dans cette partie que les deux endomorphismes $f$ et $g$ commutent i.e $fg = gf$.

1. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par $g$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les deux endomorphismes $P(f)$ et $g$ commutent.

3. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$.

3.1 Justifier que $E_\lambda(f)$ est stable par $g$.
Soit $g_\lambda$ l'endomorphisme induit par $g$ sur le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f)$.

3.2 Montrer que $\chi_{g_\lambda}$ admet au moins une racine.

3.3 En déduire qu'il existe un vecteur propre $e$ à la fois de $f$ et $g$.

## Deuxième partie : Commutativité avec un projecteur

On suppose dans cette partie que $f$ est un projecteur de $E$ i.e $f^2 = f$.

4. Montrer que $E = \ker f \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

5. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} f$.
On suppose pour la suite de cette partie que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par $g$.

6. Montrer que si $x \in \operatorname{Im} f$ alors $g(x) = f(g(x))$.

7. Monter que si $x \in \ker f$ alors $f(g(x)) = 0$.

8. En déduire que $fg = gf$.

## Troisième partie : $\dim(\mathbb{K}[f])$

On note $\pi_f$ le polynôme minimal de $f$ et $p = \deg \pi_f$ le degré du polynôme $\pi_f$.

9. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg R \leq p - 1$ et $P(f) = R(f)$.

10. En déduire que $\mathbb{K}[f] = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id}_E, \ldots, f^{p-1})$.

11. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, \ldots, f^{p-1})$ est libre.

12. En déduire que $\dim(\mathbb{K}[f]) = p$

حظ سعيد للجميع

**Bonne chance**

**END**