Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Montesquieu

✾ Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Questions de cours

1. Donner la défintion d'un hyperplan.
2. Donner la défintion d'une forme linéaire.
3. Donner la défintion d'un sous espace stable pour un endomorphisme.

Exercice 1 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ l'application définie par $f(P) = P(1) - P(-1)$.

1. Montrer que f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
2. En déduire que $F := \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ X-1 \ \text{ divise } P(X) - P(-X)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère la matrice B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

1. Calculer B^2.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\pi_B(A) = A\pi'_B(A) = 0$.

5. Montrer que si A est inversible alors $\pi_B \wedge \pi'_B \neq 1$.

PROBLÈME

Le lemme des noyaux

Dans tout le problème n est un entier ≥ 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphismes de E. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $D = P \wedge Q$ et $M = P \vee Q$.
Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = D$

Première partie : L'intersection

1. Soient $R, S \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si R divise S alors $\ker R(f) \subseteq \ker S(f)$.
2. Montrer que $\ker D(f) \subseteq \ker Q(f)$ et $\ker D(f) \subseteq \ker P(f)$
3. Montrer que $\ker P(f) \cap \ker Q(f) \subseteq \ker D(f)$.
4. En déduire que $\ker P(f) \cap \ker Q(f) = \ker D(f)$

Deuxième partie : La somme

5. Montrer qu'ils existent $P_1, Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P_1 D$ et $Q = Q_1 D$.
6. Montrer que $1 = P_1 U + Q_1 V$ et que P_1 et Q_1 sont premiers entre eux.
7. Soit $x \in \ker M(f)$. On pose $x_1 = (V(f)Q_1(f))(x)$ et $x_2 = (U(f)P_1(f))(x)$.
   - 7.1 Justifier que $x = x_1 + x_2$.
   - 7.2 Montrer que $PQ_1 = P_1 Q$ puis que M divise PQ_1.
   - 7.3 Montrer que $x_1 \in \ker P(f)$.
   - 7.4 Montrer que $x_2 \in \ker Q(f)$.
   - 7.5 En déduire que $\ker P(f) + \ker Q(f) = \ker M(f)$.



Bonne chance

END