Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Montesquieu

✾ Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Questions de cours

1. Donner la défintion d'un endomorphisme diagonalisable.
2. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 1

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ deux matrices d'ordre 2. Montrer que la matrice $(AB - BA)^2$ est une matrice scalaire (c'est-à-dire de la forme αI_2).

PROBLÈME

Le spectre de l'endomorphisme $X \mapsto AX + XB$

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application notée $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, définie pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\varphi(X) = AX + XB$$

Première partie : Questions préliminaires

1. Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tC) = \mathrm{Sp}(C)$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Deuxième partie : Des vecteurs propres de φ

Soit $a \in \mathrm{Sp}(A)$ une valeur propre de A et $b \in \mathrm{Sp}(B)$ une valeur propre de B. Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (respectivement $W \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (respectivement de ${}^tB$) associé à la valeur propre a (respectivement b). Notons enfin $v_1, \ldots, v_n$ (respectivement $w_1, \ldots, w_n$) les coordonnées de V (respectivement de W).

3. Expliciter les coefficients de la matrice $V\,{}^tW$ en fonction des coefficients $v_1, \ldots, v_n$ et $w_1, \ldots, w_n$.
4. En déduire que la matrice $V\,{}^tW$ n'est pas nulle.
5. Montrer que $\varphi(V\,{}^tW) = (a+b)V\,{}^tW$

Troisième partie : Le spectre de φ

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de φ et $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé c'est-à-dire $\varphi(Y) = \lambda Y$ et $Y \neq 0$.

6. Justifier que $AY = Y(\lambda I_n - B)$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$.
8. En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A)Y = YQ(\lambda I_n - B)$.
9. Montrer que la matrice $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
   On suppose que le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit

$$\chi_A = (-1)^n \prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \alpha)^{m_\alpha}$$

10. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $(\lambda - \alpha)I_n - B$ ne soit pas inversible.
11. En déduire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END