Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Questions de cours

1. Donner la défintion d'une valeur propre (pour un endomorphisme).
2. Enoncer le lemme des noyaux.

Exercice 1

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis donner le spectre de A.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Montrer que A est diagonalisable.
4. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable.

PROBLÈME

Racine d'une matrice

Dans tout le problème A désigne la matrice suivante;

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $E := \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Éléments propres de la matrice A

1. Montrer que $\chi_f = -X(1-X)(4-X)$.
2. En déduire le Spec(f).
3. Quelle est la dimension de chaque sous espace propre? Justifier.
4. Justifier que f est diagonalisable.
   On pose $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (2,-3,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$
5. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$.
6. Montrer que $E_0(f) = \text{Vect}(v_1)$, $E_1(f) = \text{Vect}(v_2)$ et $E_4(f) = \text{Vect}(v_3)$
7. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.
   Dans la suite on désigne par $\mathscr{B}'$ la base $\mathscr{B}' := (v_1, v_2, v_3)$.
8. Justifier que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \text{diag}(0,1,4)$.
9. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$.
10. Justifier que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(0,1,4)$.

Deuxième partie : Les racines carrées de D

Dans cette partie $V \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne une matrice telle que

$$V^2 = D \quad \text{où} \quad D = \text{diag}(0,1,4)$$

On note g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice V c'est-à-dire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(g) = V$.

11. Montrer que $g^2 = f$.
12. En déduire que $fg = gf$.
13. Montrer que $g(v_1) \in E_0(f)$, $g(v_2) \in E_1(f)$ et $g(v_3) \in E_4(f)$.
14. En déduire qu'ils existent des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$g(v_1) = \alpha_1 v_1\ , \quad g(v_2) = \alpha_2 v_2 \quad \text{et} \quad g(v_3) = \alpha_3 v_3.$$

15. Montrer que $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
16. En déduire les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3.

Troisième partie : Les racines carrées de A

Dans cette partie $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

17. Calculer $(P^{-1}BP)^2$.
18. En déduire que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.
19. Quelles sont les matrices B vérifiant $B^2 = A$?

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END