Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

Questions de cours

1. Donner la défintion d'une valeur propre (pour un endomorphisme).
2. Donner la définition d'une matrice diagonalisable.

Exercice 1

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner le spectre de la matrice A.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Calculer la matrice A^2.
6. Quelle sont les valeurs propres de la matrice A^2.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que;

$$u^3 = -u$$

1. Justifier que les deux polynômes X et X^2+1 sont premiers entre eux.
2. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
3. En déduire que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si 0 est une valeur propre de uv alors 0 est aussi valeur propre de vu.
2. Soit λ une valeur propre non nulle de uv, et on désigne par y un vecteur propre de uv associé à la valeur propre λ c'est-à-dire $(uv)(y) = \lambda y$.
   - 2.1 Justifier que $v(y) \neq 0$.
   - 2.2 En déduire que λ est une valeur propre de vu.
3. Montrer, en exploitant les résultats des questions précédentes, que $\mathrm{Sp}(uv) = \mathrm{Sp}(vu)$.

Barème indicatif :

Questions de cours : 2 pts
Exercice 1 : 6,5 pts
Exercice 2 : 4,5 pts
Exercice 3 : 2 pts
Exercice 4 : 5 pts

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END