Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

Questions de cours

1. Donner la défintion d'un endomorphisme diagpnalisable.
2. Donner la définition d'une matrice diagonalisable.
3. Donner la définition d'un endomorphisme trigonalisable.
4. Donner la définition d'une matrice trigonalisable.
5. Donner la définition du polynôme caractérisyique d'une matrice.
6. Donner la définition du sous espace caractéristique (d'un endomorphisme).

Exercice 1

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que;

$$u^3 = u$$

1. Justifier que les deux polynômes X et $X^2 - 1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 - \mathrm{Id}_E)$.
3. En déduire que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 3

On considère la matrice suivante ;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Barème indicatif :

Questions de cours : 3,5 pts
Exercice 1 : 8 pts
Exercice 2 : 6 pts
Exercice 3 : 2,5 pts

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END