# Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

## Isocrate

✾ Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

## Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une forme quadratique.
2. Rappeler la définition de la matrice d'une forme bilinéaire symétrique dans une base.
3. Rappeler la définition du cône isotrope d'une forme quadratique.
4. Rappeler la définition du noyau d'une forme quadratique.

**Exercice 1**

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire sur $E$.
   Soit $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
2. Vérifier que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$.
3. Soit $f \in F^\perp$. Montrer que $\int_0^1 t\left(f(t)\right)^2 dt = 0$.
4. En déduire que $F^\perp = \{0\}$.
5. Les deux sous espaces vectoriels $F$ et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires.

**Exercice 2** Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x,y,z) = x^2 + 2yz$

1. Montrer que $q$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la signature de $q$.
3. Déterminer le noyau de $q$.

**Exercice 3**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$ et $f$ une forme linéaire non nulle sur $E$. Pour $x \in E$, on pose $q(x) = f(x)^2$.

1. Montrer que $q$ est une forme quadratique sur $E$.
2. Déterminer $\mathscr{C}(q)$ le cône isotrope de $q$.
3. Déterminer $\ker q$. En déduire le rang de $q$.

# PROBLÈME

## Formes quadratiques équivalentes

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.
Si $q$ et $q'$ sont deux formes quadratiques sur $E$, on dit que $q$ est équivalente à $q'$ s'il existe un automorphisme $f$ de $E$ tel que $q = q' \circ f$ c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $q(x) = q'(f(x))$.

1. Montrer que la relation ainsi définie sur les formes quadratiques est une relation d'équivalence.

### Première partie : Questions préliminaires

Soient $q$ et $q'$ deux formes quadratiques équivalentes de $E$, soit $f$ un automorphisme de $E$ tel que $q = q' \circ f$. Notons enfin $\varphi$ respectivement $\varphi'$ la forme polaire de $q$ respectivement de $q'$.

2. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi'(f(x), f(y))$.
3. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base $q$-orthogonale de $E$ alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base $q'$-orthogonale de $E$.
4. Montrer que $\mathscr{C}(q') = f(\mathscr{C}(q))$.
5. Montrer que $\ker q' = f(\ker q)$.
6. En déduire que $q$ et $q'$ ont même rang.
7. Montrer que $q$ et $q'$ ont même signature.

### Deuxième partie : Un exemple

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^2$ . On désigne par $q$ l'application définie sur $E$ par $q(x,y) = xy$. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $E$.

8. Justifier que $q$ est une forme quadratique sur $E$.
9. Déterminer la signature de $q$.
   On pose $e'_1 = (1,1)$ et $e'_2 = (1,-1)$
10. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $E$.
11. Calculer la matrice de $q$ dans la base $\mathscr{B}'$.
    Soit $q'$ une forme quadratique sur $E$ de signature $(1,1)$.
12. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E$ dans laquelle la matrice de $q'$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
13. Montrer que $q$ et $q'$ sont équivalentes. Ind : on pourra considérer les deux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}_1$.

### Troisième partie : Une caractérisation

On revient au cas générale où $E$ est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

14. Montrer que si $q$ et $q'$ ont même signature alors elles sont équivalentes.