Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللّـهِ فَليتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une base q-orthogonale (où q est une forme quadratique).
2. Rappeler la définition du noyau d'une forme quadratique q.

Exercice 1

On considère l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = y^2 + xy + yz$.

1. Justifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la signature de q.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E non dégénérée, et on note φ sa forme polaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que les deux propriété suivantes sont équivalents :
   - 1.1 $\forall x \in E,\ q(u(x)) = q(x)$,
   - 1.2 $\forall x, y \in E,\ \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.

   On note $\mathscr{O}(q)$ l'ensemble des endomorphismes de E vérifiant l'une des propriétés précédentes.
2. Montrer que si $u \in \mathscr{O}(q)$ alors u est un isomorphisme.
3. Montrer que $\mathscr{O}(q)$ est un groupe.
4. Montrer que si $u \in \mathscr{O}(q)$ alors u transforme toute base q-orthogonale de E en une base q-orthogonale de E.

PROBLÈME

Produit scalaire sur les polynômes

Soit n un entier supérieure ou égale à 1, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieure ou égale à n.

Première partie : Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. Soit $P,Q \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. Justifier que la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} = m!$.
4. Pour $p \in [\![0,n]\!]$, calculer la norme de X^p.

Deuxième partie : Orthonormalisée de la base canonique

On note $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1,X,\dots,X^n)$. On rappelle que pour tout $0 \le k \le n$, $\text{Vect}(P_0,\dots,P_k) = \text{Vect}(1,\dots,X^k)$.

5. Montrer que pour tout $0 \le k \le n$, $\deg P_k = k$.
6. Soit $0 \le i \le n$, justifier que $X^i \in \text{Vect}(P_0,\dots,P_i)$.
7. Soit $1 \le k \le n$. Montrer que $P_k' \in \text{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$.
8. En déduire, pour $0 \le k \le n$, que les deux polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux.
9. Montrer que pour tout $0 \le k \le n$, $(P_k(0))^2 = \|P_k\|^2 = 1$.

Troisième partie : Calcul d'une distance

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / P(0) = 0\}$.

10. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
    Soit R un élément non nul de $F^\perp$.
11. Justifier que $F^\perp = \text{Vect}(R)$.
12. Vérifier que pour tout $0 \le k \le n$, $\varphi(P_k,R) = P_k(0)\varphi(1,R)$.
13. En déduire que $R = \varphi(1,R)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k$.
14. On note p_F la projection orthogonale sur F.
    - 14.1 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $p_F(P) = P - \frac{\varphi(P,R)}{\|R\|^2}R$.
    - 14.2 Montrer que $d(1,F) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.