Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Corrigé

Questions de Cours

Cours

Exercice 1

On considère l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x,y,z) = y^2 + xy + yz$.

1. La forme polaire est donnée par

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = yy' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + y'z + yz')$$

2. D'abord $q(x,y,z) = y^2 + y(x+z) = (y + \frac{1}{2}(x+z))^2 - \frac{1}{4}(x+z)^2$, ainsi q est de signature $(1,1)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E non dégénérée, et on note φ sa forme polaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. (1) $\Rightarrow$ (2), en exploitant l'identité polaire, on a

$$\begin{aligned} \varphi(u(x),u(y)) &= \tfrac{1}{2}(q(u(x)+u(y)) - q(u(x)) - q(u(y))) = \tfrac{1}{2}(q(u(x+y)) - q(u(x)) - q(u(y))) \\ &= \tfrac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x,y) \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Immédiate, $q(u(x)) = \varphi(u(x),u(x)) = \varphi(x,x) = q(x)$.
On note $\mathscr{O}(q)$ l'ensemble des endomorphismes de E vérifiant l'une des propriétés précédentes.

2. Soit $u \in \mathscr{O}(q)$ et $x \in \ker u$. Pour tout $y \in E$ on a $\varphi(x,y) = \varphi(u(x),u(y)) = \varphi(0,u(y)) = 0$, donc $x \in \ker q$. Or q est non dégénéré, on a donc $x = 0$. L'espace vectoriel E étant de dimension finie et u injectif, donc u est un isomorphisme.

3. Il suffit de démontrer que $\mathcal{O}(q)$ est un sous groupe de $\mathrm{Gl}(E)$. D'après le résultat de la question précédente $\mathcal{O}(q) \subseteq \mathrm{Gl}(E)$.
$\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(q)$ car $q(\mathrm{Id}_E(x)) = q(x)$.
soient $u, v \in \mathcal{O}(q)$ et montrons que $uv^{-1} \in \mathcal{O}(q)$. Pour $x \in E$, on a $q((uv^{-1})(x)) = q(u(v^{-1}(x))) = q(v^{-1}(x)) = q(v(v^{-1}(x))) = q(x)$. D'où le résultat.

4. Soit $u \in \mathcal{O}(q)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale de E. Puisque u est un isomorphisme, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de E. Pour $i \neq j$ on a $\varphi(u(e_i), u(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) = 0$. Ainsi $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base q-orthogonale de E.

PROBLÈME

Produit scalaire sur les polynômes

Soit n un entier supérieure ou égale à 1, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieure ou égale à n.

Première partie : Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a $\lim_{t\to+\infty} t^2 P(t)Q(t)e^{-t} = 0$, donc $P(t)Q(t)e^{-t} =_{+\infty} o(\frac{1}{t^2})$. Par conséquent la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par suite intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$.

2. Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application $P \mapsto \varphi(P,Q)$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale). L'application φ est symétrique (commutativité des polynômes $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$). On a aussi $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt \geq 0$, ce qui affirme la positivité. Finalement, si $\varphi(P,P) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\,dt = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive , donc nulle. Or la fonction exponentielle ne s'annule jamais, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P(t) = 0$. Ainsi le polynôme P est nul (il admet une infinité de racines).

3. Par récurrence sur $m \geq 0$. Pour $m = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.
Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$ et supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\,dt = m!$. Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{m+1} e^{-t}\,dt &= -\int_0^{+\infty} t^{m+1}(e^{-t})'\,dt = -[t^{m+1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (m+1)\int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\,dt \\ &= (m+1)\times m! = (m+1)!\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. On a $\varphi(X^p, X^p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t}\,dt = (2p)!$, donc $\|X^p\| = \sqrt{(2p)!}$.

Deuxième partie : Orthonormalisée de la base canonique

On note $(P_0, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \ldots, X^n)$. On rappelle que pour tout $0 \leq k \leq n$, $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, X^k)$.

5. On a $P_k \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, X^k)$, donc $\deg P_k \leq k$. Supposons par l'absurde que $\deg P_k \neq k$, c'est-à-dire $\deg P_k < k$ ou encore $\deg P_k \leq k-1$. Dans ce cas $P_k \in \mathrm{Vect}(1, \ldots, X^{k-1}) = \mathrm{P_k}, \ldots, \mathrm{P_{k-1}}$, autrement P_k est combinaison linéaire des polynômes $P_0, \ldots, P_{k-1}$, contradiction avec le fait que la famille $(P_0, \ldots, P_k)$ est libre (orthonormale). On en déduit alors que $\deg P_k = k$.

6. Soit $0 \leq i \leq n$, on a $X^i \in \text{Vect}(1,\dots,X^i) = \text{Vect}(P_0,\dots,P_i)$.

7. Soit $1 \leq k \leq n$. On a $\deg P'_k = \deg P_k - 1 = k-1$, donc $P'_k \in \text{Vect}(1,\dots,X^{k-1}) = \text{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$.

8. Si $k = 0$, le polynôme P_0 est de degré 0 donc constant, par suite P'_0 est nul. Par conséquent $\varphi(P_0, P'_0) = 0$.
Si $k \geq 1$, d'après le résultat de la question précédente, $P'_k \in \text{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$. Le polynôme P_k est orthogonal aux polynômes $P_0,\dots,P_{k-1}$, donc il est aussi orthogonal à tout élément de $\text{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$, en particulier P_k est orthogonal à P'_k.

9. La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est orthonormale, donc $\|P_k\|^1 = 1$. D'autre part, en effectuant une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}\|P_k\|^2 &= \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-1}\,dt = -\int_0^{+\infty} P(t)^2 (e^{-1})\,dt \\ &= -[P(t)^2 e^{-t}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} P(t)P'(t)e^{-1}\,dt \\ &= (P(0))^2 + 2\varphi(P'_k, P_k) = P_k(0)^2\end{aligned}$$

Notons, d'après le résultat précédent, que les deux polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux, donc $\varphi(P_k, P'_k) = 0$.

Troisième partie : Calcul d'une distance

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / P(0) = 0\}$.

10. On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(0)$. L'application f est une forme linéaire non nulle ($f(X+1) = 1$) et $F \ker f$, par conséquent F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit R un élément non nul de $F^\perp$.

11. Puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, $F^\perp$ est une droite vectorielle. Le sous espace vectoriel $F^\perp$ est engendré par chacun de ses vecteurs non nul, en particulier $F^\perp = \text{Vect}(R)$.

12. Remarquons d'abord que $P_k - P_k(0) \in F$ (en effet $(P_k - P_k(0))(0) = P_k(0) - P_k(0) = 0$). Donc $P_k - P_k(0)$ est orthogonal à R, autrement dit $\varphi(P_k - P_k(0), R) = 0$, par conséquent $\varphi(P_k, R) = \varphi(P_k(0), R) = P_k(0)\varphi(1, R)$.

13. La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, donc

$$R = \sum_{k=0}^{n} \varphi(P_k, R)P_k = \sum_{k=0}^{n} P_k(0)\varphi(1,R)P_k = \varphi(1,R)\sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k$$

14. On note p_F la projection orthogonale sur F.

14.1 Le polynôme $\frac{R}{\|R\|}$ forme une base orthonormale de $F^\perp$. Donc

$$p_F(P) = P - P_{F^\perp}(P) = P - \varphi\left(P, \frac{R}{\|R\|}\right)\frac{R}{\|R\|} = P - \frac{\varphi(P,R)}{\|R\|^2}R$$

14.2 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $d(P,F) = \|P - p_F(P)\| = \|\frac{\varphi(P,R)}{\|R\|^2}R\| = \dfrac{|\varphi(P,R)|}{\|R\|}$.. Dans le cas de $P = 1$, en tenant compte $P_k(0)^2 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\|R\| &= \left\|\varphi(1,R)\sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k\right\| = |\varphi(1,R)|\left\|\sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k\right\| \\ &= |\varphi(1,R)|\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2} = |\varphi(1,R)|\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit alors que $d(1,F) = \dfrac{|\varphi(1,R)|}{|\varphi(1,R)|\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Remarque : *On rappelle que, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale d'un espace euclidien E et $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.*