Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Rappeler la définition de la base antéduale.
2. Rappeler la définition du cone isotrope.

Exercice 1

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2xz$.

1. Réduire la forme quadratique q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer la signature et le rang de q.
3. Déterminer A la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver une matrice inversible Q telle que la matrice ${}^tQAQ$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} P(e^{it})\overline{Q(e^{it})}\,dt\right)$$

1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Justifier que $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)$.
2. Montrer que l'application $\langle .,. \rangle$ défini un produit scalaire sur E.
3. Soit $(k,l) \in [\![0,n]\!]^2$. Calculer $\langle X^k, X^l\rangle$.
4. En déduire que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale de E.
5. Soit $P \in E$. Exprimer $\|P\|$ en fonction des coefficients de P.

PROBLÈME

Projection orthogonale

Dans tout le problème E désigne un espace préhilbertien réel.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

Première partie : Projection orthogonale sur un hyperplan

Soit $v \in E$ un vecteur non nul. On pose $H = \{x \in E \,/\, \langle x, v\rangle = 0\}$.

1. Justifier que H est un hyperplan de E.
2. Montrer que que $H \oplus \text{Vect}(v) = E$.
3. En déduire que $H^{\perp} = \text{Vect}(v)$.
4. Montrer que pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v$.
5. En déduire, pour $x \in E$, $d(x, H)$.

Deuxième partie : Une inégalité de Bessel

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$.

6. Donner une base orthonormale de F_n.
   Dans la suite, x désigne un élément de E.
7. Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de $p_{F_n}(x)$.
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2$.
9. Montrer alors que la série $\sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle^2$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$.