Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

Corrigé

بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

Cours

Exercice 1

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2xz$.

1. Réduction de Gauss ;

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 + 2x(2y-z) + y^2 + z^2 - 4yz = (x+2y-z)^2 - (2y-z)^2 + y^2 + z^2 - 4yz \\ &= (x+2y-z)^2 - 3y^2. \end{aligned}$$

2. La signature de q est $(1,1)$ et $\operatorname{rg}(q) = 2$.

3. La matrice de q dans la base canonique est ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On considère les trois formes linéaires $l_1(x,y,z) = x + 2y - z$, $l_2(x,y,z) = y$ et $l_3(x,y,z) = z$. La faille (l_1, l_2, l_3) est une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$ et on a

$$q(x,y,z) = \big(l_1(x,y,z)\big)^2 - 3\big(l_2(x,y,z)\big)^2 + 0.\big(l_3(x,y,z)\big)^2$$

Remarque : Vu que le coefficient de l_3 dans l'expression de q est nul, il y a alors plusieurs possibilités pour le choix de l_3. La forme linéaire l_3 peut être choisie de sorte que la famille (l_1, l_2, l_3) forme une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$.

Soit $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base antéduale de (l_1,l_2,l_3). Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Si on note (x',y',z') les composantes de (x,y,z) dans la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, alors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Mais d'autre part on a $\left\{\begin{array}{lcl}x'&=&x+2y-z\\y'&=&y\\z'&=&z\end{array}\right.$. En inversant ce système linéaire, on obtient $Q=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matrice de q dans la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de bases on a $D={}^tQAQ$.
En particulier ${}^tQAQ$ est une matrice diagonale.

Exercice 2

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$. Pour $P,Q\in E$, on pose

$$\langle P,Q\rangle=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi}P(e^{it})\overline{Q(e^{it})}dt\right)$$

1. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$. Notons que si b est un nombre complexe alors $\operatorname{Re}(b)=\operatorname{Re}\left(\overline{b}\right)$. Par conséquent $\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)=\operatorname{Re}\left(\overline{z\overline{z'}}\right)=\operatorname{Re}\left(\overline{z}z'\right)$.

2. La linéarité de l'application $P\mapsto\langle P,Q\rangle$ est une conséquence de la linéarité de l'intégrale et du fait que $\operatorname{Re}(\lambda z+z')=\lambda\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(z')$ lorsque $z,z'\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Symétrie : En tenant compte le résultat de la première question on a

$$\begin{aligned}\langle P,Q\rangle&=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi}P(e^{it})\overline{Q(e^{it})}dt\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(P(e^{it})\overline{Q(e^{it})}\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\overline{P(e^{it})}Q(e^{it})\right)dt=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi}Q(e^{it})\overline{P(e^{it})}dt\right)\end{aligned}$$

Positivité : Si $P\in E$, alors $P(e^{it})\overline{P(e^{it})}=|P(e^{it})|^2$ est un réel positif. Par conséquent

$$\langle P,P\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{it})|^2dt\geq 0$$

Définie : Si de plus $\langle P,P\rangle=0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}|P(e^{it})|^2dt=0$. Puisque $t\mapsto|P(e^{it})|^2$ est une fonction continue positive sur $[0,2\pi]$, il vient que pour tout $t\in[0,2\pi]$, $|P(e^{it})|=0$. En particulier le polynôme P possède une infinité de racines (les nombres de la forme e^{it} avec $t\in[0,2\pi]$ sont des racines de P). Il en résulte que $P=0$.

3. Soit $(k,l)\in[\![0,n]\!]^2$. Notons d'abord que

$$\langle X^k,X^l\rangle=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)t}dt\right)$$

Si $k=l$, dans ce cas $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)t}dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$. Donc $\langle X^k,X^k\rangle=1$.

Si $k\neq l$, dans ce cas $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)t}dt=\left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)}\right]_0^{2\pi}=0$. Donc $\langle X^k,X^l\rangle=0$.

4. D'après le résultat de la question précédente, la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ une famille orthonormale, par conséquent c'est une base orthonormale de E.

5. Soit $P \in E$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Remarquons que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont les composantes de P dans la base orthonormale $(1, X, \dots, X^n)$. On en déduit alors que

$$\|P\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$$

PROBLÈME

Projection orthogonale

Dans tout le problème E désigne un espace préhilbertien réel.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

Première partie : Projection orthogonale sur un hyperplan

Soit $v \in E$ un vecteur non nul. On pose $H = \{x \in E \,/\, \langle x, v\rangle = 0\}$.

1. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle x, v\rangle$ est une forme linéaire non nul ($f(v) = \|v\|^2 \neq 0$). Il en découle que $H = \ker f$ est un hyperplan de E.

2. H étant un hyperplan de E et $v \notin H$, donc les deux sous espaces vectoriels H et $\text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans E, autrement dit $H \oplus \text{Vect}(v) = E$.

3. De la définition de H on a immédiatement $v \in H^\perp$, ou encore $\text{Vect}(v) \subseteq H^\perp$.
Soit $x \in H^\perp$. D'après le résultat de la question précédente il existe $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tels que $x = h + \lambda v$. Puisque $h \in H$, on a $\langle h, x\rangle = 0$, autrement dit $\langle h, h + \lambda v\rangle = 0$ ou encore $\langle h, h\rangle + \lambda\langle h, v\rangle = 0$. Mais $\langle h, v\rangle = 0$, ce qui implique que $\|h\|^2 = 0$. D'où $h = 0$, par conséquent $x = \lambda v \in \text{Vect}(v)$.
On peut raisonner autrement : Remarquons que par définition de H, on a $H = \text{Vect}(v)^\perp$. Puisque $\text{Vect}(v)$ est un sous espace vectoriel de dimension finie, on a l'égalité $\text{Vect}(v)) = \text{Vect}(v)^{\perp\perp}$, par suite $\text{Vect}(v) = H^\perp$.

4. Le vecteur $\frac{v}{\|v\|}$ forme une base orthonormale de $\text{Vect}(v) = H^\perp$. Donc

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - \langle x, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|} = x - \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

5. $d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v\| = \frac{|\langle x, v\rangle|}{\|v\|}$.

Deuxième partie : Une inégalité de Bessel

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.

6. $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F_n.
Dans la suite, x désigne un élément de E.

7. Puisque $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F_n, la projection orthogonale $p_{F_n}(x)$ s'exprime dans cette base comme suit,

$$p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$$

8. On sait que $\|p_{F_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. D'autre par, on a

$$\|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$$

D'où le résultat.

9. La série $\sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle^2$ est a termes positifs et sa somme partielle est majorée (par la constante $\|x\|^2$), donc elle est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$.