Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Rappeler la définition de la base duale.
2. Rappeler la définition du noyau d'une forme quadratique.

Exercice 1

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2$$

1. Réduire la forme quadratique q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer la signature et le rang de q.
3. Déterminer A la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit E espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. Soit e un vecteur non isotrope et D la droite vectorielle engendrée par e.

1. Montrer que la somme $D + D^\perp$ est directe.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $x - \frac{\varphi(x,e)}{q(e)} e \in D^\perp$.
3. En déduire que $E = D \oplus D^\perp$.

PROBLÈME

Intersection de noyaux de formes linéaires

Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi$ des formes linéaires sur E.
Le but du problème est de démontrer le résultat suivant ;

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi \iff \varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$$

Première partie : Condition suffisante

On suppose dans cette partie (et seulement dans cette partie) que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

1. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi$.

Deuxième partie : Cas où la famille est libre

On suppose dans cette partie que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre et que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi$.

2. Justifier que $p \leq n$.
3. Montrer que si $n = p$ alors $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.
   On suppose dans la suite de cette partie que $p < n$.
4. Justifier l'existence des formes linéaires $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n$ sur E telles que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$ soit une base de E^*.
   On désigne par $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$.
5. Montrer que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.
6. Montrer que pour tout $f \in E^*$, $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \varphi_i$.
7. Montrer que pour tout $p+1 \leq i \leq n$, $\varphi(e_i) = 0$.
8. En déduire que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

Troisième partie : Le cas générale

On ne suppose plus que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre et on suppose que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi$. On pose $F = \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

9. Montrer qu'il existe $i_1, \ldots, i_r \in [\![1, p]\!]$ tels que $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_r})$ soit une base de F.
10. Montrer que $\bigcap_{k=1}^{r} \ker \varphi_{i_k} \subseteq \ker \varphi$.
11. En déduire que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.