# Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

## Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'un hyperplan.
2. Rappeler la définition d'un produit scalaire.

---

**Exercice 1**

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(P) = P(1) + P'(0)$.

1. Montrer que $f$ est une forme linéaire non nulle sur $E$.
2. En déduire que $F := \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(1) + P'(0) = 0\}$ est un hyperplan de $E$.

---

**Exercice 2**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P,Q) = P(0)Q(2) + P(1)Q(1) + P(2)Q(0)$.

1. Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$.
2. Déterminer la forme quadratique associée à $\varphi$.
3. $\varphi$ est-elle positive ?

---

**Exercice 3**

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 - 4xy + y^2 + z^2$$

1. Réduire la forme quadratique $q$ par la méthode de Gauss.
2. Déterminer la signature et le rang de $q$.
3. Déterminer $A$ la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

---

**Exercice 4**

Soit $E := \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les applications continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $f, g \in E$, on pose;

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
   On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
2. Justifier que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$.
3. Soit $f \in F^{\perp}$.
   - 3.1 Montrer que $\int_0^1 t(f(t))^2 dt = 0$. Indication : on pourra considérer la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = tf(t)$.
   - 3.2 En déduire que $f = 0$.
4. Que peut-on dire de $F^{\perp}$ ?

---

حظ سعيد للجميع

**Bonne chance**

**END**