Contôle (Algèbre 5)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une forme linéaire.
2. Rappeler la définition d'une forme quadratique.
3. Rappeler la définition d'un produit scalaire.
4. Rappeler la définition de $A^{\perp}$.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y, z) = x - z$.

1. Montrer que f est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que $F := \{(x, y, z) \in E \ / \ x = z\}$ est un hyperplan de E.

Exercice 2

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2$$

1. Réduire la forme quadratique q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer la signature et le rang de q.
3. Déterminer A la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E telle que $q(e_1) = 1$, $q(e_2) = -1$ et $\varphi(e_1, e_2) = 0$.

1. Donner la matrice de q dans la base $\mathscr{B}$.
2. Quelle est la signature de q?
3. On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$.
   - 3.1 Montrer que $q(\varepsilon_1) = q(\varepsilon_2) = 0$.
   - 3.2 Montrer que $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2$.
   - 3.3 Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E et donner la matrice de q dans cette base.

حظا سعيدا للجميع

Bonne chance

END