Contôle (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

B A

LPEM

Nicolas Copernic

✾ Les mathématiques ne sont écrites que pour les mathématiciens.

Questions de Cours

1. Rappeler la définition 'un groupe monogène.
2. Rappeler la définiton d'un sous groupe distingué.
3. Enoncer le théorème de Lagrange.
4. Enoncer le théorème de Cauchy.

Exercice 1 Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable par la loi de G.

1. Montrer que si $h \in H$, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $h^m = e$.
2. En déduire que H est un sous groupe de G.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif unitaire. On dit que $x \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. On note $N(A) = \{x \in A \,/ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n = 0\}$.

1. Montrer que si x et y sont des éléments nilpotents alors $x+y$ est nilpotent. Indication : formule de binôme de Newton.
2. Montrer que N est un idéal de A.
3. Soit P un idéal premier de A.
   - 3.1 Soit $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $x^n \in P$ alors $x \in P$.
   - 3.2 En déduire que $N \subseteq P$.

PROBLÈME

Autour du groupe d'automorphismes d'un groupe

Si G est un groupe, on rappelle que $\mathrm{Aut}(G)$ est l'ensemble des automorphismes de G. Pour $x \in G$, on note $i_x : G \to G$ l'application définie pour tout $g \in G$, par $i_x(g) = xgx^{-1}$. Enfin on note $Z(G)$ le centre de G c'est-à-dire $Z(G) = \{g \in G \ / \ \forall x \in G,\ gx = xg\}$.

Première partie : Questions aléatoires

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe distingué de G.
2. Que peut-on dire de G si $G/Z(G)$ est trivial.
3. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ muni de la composition est un groupe.
4. Montrer que pour tout $x \in G$, $i_x \in \mathrm{Aut}(G)$.
5. Montrer que $G/Z(G)$ est isomorphe à un sous groupe de $\mathrm{Aut}(G)$. Indication : on pourra considérer l'application $x \mapsto i_x$.
6. Déterminer $\mathrm{Aut}(G)$ lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Deuxième partie : Groupe à groupe d'automorphismes trivial

Dans cette partie G est un groupe fini non trivial tel que $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{Id}_G\}$.

7. Montrer que G est commutatif.
8. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
9. Montrer que G muni de l'application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G \to G$ définie par $(\overline{k}, g) \mapsto g^k$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel de dimension finie.
10. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Troisième partie : Groupe à groupe d'automorphismes cyclique

Dans cette partie G est un groupe fini. On suppose que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe cyclique.

12. Montrer que $G/Z(G)$ est un groupe cyclique.
13. En déduire que G est commutatif.