Contôle (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللّـهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Enoncer le théorème de Cauchy.
2. Rappeler la définition d'un groupe cyclique.
3. Rappeler la définition de l'orbite d'un élément.
4. Rappeler la définition d'un idéal premier.

Exercice 1

Soit G un groupe abélien d'ordre 35.

1. Montrer que G admet un élément a d'ordre 7 et un élément b d'ordre 5.
   On pose $H = \langle a \rangle$ et $K = \langle b \rangle$
2. Quel est l'ordre de H et de K.
   Soit $f : K \times H \to G$ l'application définie par $f(x, y) = xy$
3. Montrer que f est un morphisme de groupes.
4. Soit $(x, y) \in \ker f$. Justifier que $x = y^{-1}$, puis que $y^5 = e$.
5. En déduire que f est injectif.
6. Montrer que $K \times H$ et G sont isomorphes.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre et fini. Montrer que A est un corps.

PROBLÈME

Caractère d'un groupe

Soit G un groupe. Un caractère de G est un morphisme de groupes $G \to \mathbb{C}^*$ (le groupe $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication).

Première partie : Questions préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$ème de l'unité c'est-à-dire $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un groupe (pour la multiplication).
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
3. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est cyclique.
   Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n$ l'application définie par $f(k) = \omega^k$.
4. Montrer que f est un morphisme de groupes.
5. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Deuxième partie : Caractère d'un groupe abélien fini

Dans cette partie G est un groupe abélien fini d'ordre $n \geq 2$ et $g : G \to \mathbb{C}^*$ un caractère de G.

6. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(x^k) = g(x)^k$.
7. En déduire que pour tout $x \in G$, $g(x) \in \mathbb{U}_n$.
8. Montrer que pour tout $x \in G$, $|g(x)| = 1$, en déduire que $g(x^{-1}) = \overline{g(x)}$.
   On suppose dans la suite de cette partie qu'il existe $x_0 \in G$ tel que $g(x_0) \neq 1$.
9. Montrer que $G = \{x_0 x \ / \ x \in G\}$.
10. Montrer que $g(x_0)\left(\sum_{x\in G} g(x)\right) = \sum_{x\in G} g(x)$.
11. En déduire que $\sum_{x\in G} g(x) = 0$.

Troisième partie : Groupe dual

On note $\widehat{G}$ l'ensemble de tout les caractères de G. Pour $g, g' \in \widehat{G}$, on note gg' l'application de $G \to \mathbb{C}^*$ définie, pour tout $x \in G$, par $(gg')(x) = g(x)g'(x)$.

12. Montrer que si $g, g' \in \widehat{G}$ alors $gg' \in \widehat{G}$.
13. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe (muni de la loi précédente).
14. Dans cette question $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes. On pourra considérer l'application $\varphi : \widehat{G} \to \mathbb{U}_n$ définie par $\varphi(g) = g(\overline{1})$.