Contôle (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

B A

LEEM

بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللّـهِ فَليتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق اللّه العظِيـم

Questions de Cours

1. Enoncer le théorème de Lagrange.
2. Rappeler la définition d'un sous groupe distingué.

Exercice 1

Soit G un groupe d'ordre 11.

1. Soit $x \in G \setminus \{e\}$. Montrer que $o(x) = 11$.
2. En déduire que G est un groupe cyclique.

Exercice 2 (Euler et Fermat)

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

1. Justifier que $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
2. Soit $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.
   On pose $\varphi(n) = \text{card}\,(\{0 \leq k \leq n-1 \ / \ k \wedge n = 1\})$.
3. Montrer que $o((U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \times)) = \varphi(n)$.
4. En déduire que si $0 \leq k \leq n-1$ tel que $k \wedge n = 1$ alors $k^{\varphi(n)} = 1\ [n]$.
5. Montrer que si p est un nombre premier alors $\forall k \in \mathbb{Z},\ k^p = k\ [p]$.

PROBLÈME

Caractère d'un groupe

Dans tout le problème G désigne un groupe de neutre e.

Première partie :
L'ordre de x^k

Soit $x \in G$ un élément d'ordre $n \geq 2$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$ et on pose $y = x^k$ et $d = k \wedge n$.

1. Calculer $y^{\frac{n}{d}}$.
2. En déduire que $o(y) = \frac{n}{d}$.

Deuxième partie : Ordre du produit ab

Dans cette partie $a, b \in G$ sont deux éléments d'ordre fini, $o(a) = n > 1$ et $o(b) = m > 1$. On suppose que $ab = ba$ et que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.

3. Montrer que ab est d'ordre fini.
4. Montrer que $(ab)^{m \vee n} = e$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(ab)^k = e$.
   - 5.1 Montrer que m et n divisent k.
   - 5.2 En déduire que $n \vee m$ divise k.
   - 5.3 Montrer que alors que $o(ab) = n \vee m$.
6. Dans cette question on ne suppose plus que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ et os suppose que $m \wedge n = 1$.
   - 6.1 Montrer en fait que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.
   - 6.2 En déduire que $o(ab) = nm$.

Troisième partie : Max des ordres

Dans cette partie on suppose que G est un groupe Abélien fini. Soit $l = \max\{o(x) \ / \ x \in G\}$.

7. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^l = e$.