Contôle (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LEEM

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

وَ عـلَى اللَّـهِ فَليتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلـون

صـدق الله العظِيـم

Questions de Cours

1. Enoncer le théorème de Lagrange.
2. Rappeler la définition d'un sous groupe distingué.

Exercice 1

Soit G un groupe (noté multiplicativement) de neutre e tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
Montrer que G est abélien.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et G un groupe d'ordre $3n+2$.

1. Soit $x, y \in G$ tel que $x^3 = y^3$.
   - 1.1 Montrer que $x^2 = y^2$.
   - 1.2 En déduire que $x = y$.
2. Montrer que l'application $G \to G$, $x \mapsto x^3$ est surjective.

Exercice 3

Soient G un groupe, H et K deux sous groupes de G. On suppose que H est distingué dans G.

1. Montrer que $HK := \{hk \ / \ h \in H, \ k \in K\}$ est un sous groupe de G.
2. Justifier que H est distingué dans HK.
3. Montrer que le groupe quotient HK/H est isomorphe au groupe quotient $K/(K \cap H)$. Indication : on pourra considérer l'application $K \to HK/H$.

Exercice 4

Soit G un groupe abélien d'ordre pq où p et q sont deux nombre premiers distincts. Soit $a \in G \setminus \{e\}$.

1. Quels sont les diviseurs positifs de l'entier pq?
2. Justifier que $o(a) \in \{p, q, pq\}$.
3. Montrer que si $o(a) = pq$, alors G est cyclique.
4. On suppose que $o(a) = p$.
   - 4.1 Quel est l'ordre du groupe quotient $G/\langle a\rangle$?
   - 4.2 Montrer que le groupe $G/\langle a\rangle$ est cyclique.
   - 4.3 Montrer que G est cyclique.

Exercice 5

Soit $A = \mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note B l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $B = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ / \ n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Justifier que B est un sous anneau de A.
   On pose $I = \{P \in B \ / \ P(0) \text{ pair}\}$.
2. Montrer que I est un idéal de B.
3. Montrer que $I = (2, X)$.