Contrôle (Algèbre 6)

Il sera tenu compte, dans lappréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

B A

LEEM

بِسمِ اَللهِ اَلرَّحمٰنِ اَلرَّحِيمِ

وَ علَى اَللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلون

صـدق اَللّه العظِيـم ✾

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'un groupe monogène.
2. Rappeler la définition d'un groupe cyclique.
3. Rappeler la définition d'un sous groupe distingué.
4. Quels sont les sous groupes de $\mathbb{Z}$?

Exercice 1
Soit G un groupe (noté multiplicativement) de neutre e tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
Montrer que G est abélien.

Exercice 2 Soit G un groupe fini et H un sous groupe distingué de G d'indice n.

1. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^n \in H$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \wedge n = 1$. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^k \in H$.

Exercice 3
On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
2. En déduire la signature de σ.

Exercice 4
Soit G un groupe. Pour $g \in G$, on considère l'application $\varphi_g : G \to G$ définie par $\varphi(x) = gxg^{-1}$.

1. Montrer que φ_g est un morphisme de groupes.

2. Montrer que φ_g est un isomorphisme de groupes.

Exercice 5

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des réels suivants :

$$\mathbb{Z}[2] = \{a + b\sqrt{2} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous anneau de $\mathbb{R}$.
   Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.
2. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux (unitaires).
   Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$.
3. Montrer que pour tout $x, y \in, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
4. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si, et seulement si, $N(x) \in \{-1, 1\}$.